Chapitre 1

Suites arithmétiques

1.1 Différents modes de génération de suites de nombres

Voici des suites de nombres :

- suite A : 10 ; 8 ; 6 ; 4 ; 2 ; 0 ; -2 ; ...
- suite B : 16 ; 24 ; 36 ; 54 ; 81 ; 121,5 ; ...
- suite C : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ...
- suite D : 5 ; 6 ; 8 ; 12 ; ...
- suite E : -10 ; -18 ; -24 ; -28 ; ...

Pour les décrire, on utilise une notation à base d'indices. On note souvent u_0 le premier terme, u_1 le deuxième, ...

Les indices sont des entiers naturels (de l'ensemble $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$).

- Pour la suite A : $u_0 =$; $u_1 =$; $u_2 =$; $u_3 =$; $u_4 =$; $u_5 =$

  Au lieu d'écrire : « Le premier terme de la suite A est 10 et on passe d'un terme au suivant en enlevant 2 », on écrira :
  « La suite (u_n) est définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ pour tout entier naturel n ».
- Pour la suite B : $u_0 =$; $u_1 =$; $u_2 =$; $u_3 =$; $u_4 =$; $u_5 =$

  Cette suite est définie par :

$$u_0 = 16 \quad \text{et pour tout entier naturel } n : u_{n+1} =$$

- La suite D est définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} =$
- La suite C (« de Fibonacci ») est définie par

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 1 \quad \text{et pour } n > 1 :$$

- Pour la E : $u_n =$

On peut générer une suite :

— par une **relation de récurrence** : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Ici on exprime $\boldsymbol{u_{n+1}}$ **en fonction de** $\boldsymbol{u_n}$.

— à l'aide d'une fonction : $u_n = f(n)$.
Ici on exprime $\boldsymbol{u_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$.

— avec des phrases

— avec un algorithme :

```
n ← 0
u ← 5
Tant que n < 4
    u ← u × 3 + 2
    n ← n + 1
```

1.2 Définition d'une suite arithmétique

Exemple : 5 8 11 14 17 ...

Notons u_0 le premier terme, u_1 le deuxième, etc. Ici, $u_0 = 5$; $u_1 = 8$; $u_2 = 11\ldots$.

Au lieu d'écrire :
« Le premier terme de la suite est 5. On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3 »,
on écrira :
« La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ pour tout entier naturel n ».

Remarque : chaque terme est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'entourent :

$$8 = \frac{5+11}{2} \qquad 11 = \frac{8+14}{2} \qquad \ldots$$

Définition 1. Une suite de nombres (u_n) est arithmétique si chaque terme s'obtient en ajoutant un même nombre au précédent :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + a} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

u_n est appelé terme de rang n et a est la raison de la suite.

$$u_0 \xrightarrow{+a} u_1 \xrightarrow{+a} u_2 \xrightarrow{+a} u_3 \xrightarrow{+a} \ldots \qquad u_n \xrightarrow{+a} u_{n+1} \qquad \ldots$$

Exemples :

— Les entiers naturels forment une suite arithmétique de raison 1. Chaque terme se déduit du précédent en ajoutant 1. Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n > 1$: $u_{n+1} = u_n + 1$

— Les entiers naturels pairs (0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ...) forment une suite arithmétique de raison 2. Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n : $u_{n+1} = u_n + 2$

1.3 Variations

Si la raison a est positive, alors la suite arithmétique est croissante.
Si la raison a est négative, alors la suite arithmétique est décroissante.

1.4 Terme général

Pour l'instant, on sait passer d'un terme au suivant. On connaît u_0, puis on calcule u_1 puis u_2 puis .... Pour calculer u_{50} par exemple, il faut calculer tous les précédents.

Il serait intéressant de savoir passer directement de u_0 à u_{50}.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "+3"] \arrow[rrrrr, dotted, bend right] & u_1 \arrow[r, "+3"] & u_2 \arrow[r, "+3"] & u_3 \arrow[r, "+3"] & \dots & u_{50} \end{tikzcd}$$

<u>Cas général</u>

Appelons u_0 le premier terme d'une suite arithmétique de raison a. Écrivons les termes de cette suite[1] :

u_0
$u_1 = u_0 + 1a$
$u_2 = u_1 + a = u_0 + a + a = u_0 + 2a$
$u_3 = u_2 + a = u_0 + 2a + a = u_0 + 3a$
$\vdots$
$u_n = u_0 + na$

Pour calculer le terme de rang n : $\boxed{u_n = u_0 + na}$

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "+a"] \arrow[rrrrr, dotted, bend right] & u_1 \arrow[r, "+a"] & u_2 \arrow[r, "+a"] & u_3 \arrow[r, "+a"] & \dots & u_n \end{tikzcd}$$

1.5 Somme de termes d'une suite arithmétique

1.5.1 Un premier exemple

On veut calculer $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$.

Ainsi, la somme des 100 premiers entiers est :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 =$$

1. Pour ceux qui préfèrent les phrases : pour calculer u_1 en partant de u_0, on ajoute une fois la raison ; pour calculer u_2 en partant de u_0, on ajoute 2 fois la raison ; ... ; pour calculer u_n en partant de u_0, on ajoute n fois la raison.

1.5.2 Deuxième exemple

On veut calculer $S = 1 + 11 + 21 + 31 + \cdots + 2001$.

1.5.3 Cas général

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on utilise la même ruse.

$$\boxed{\substack{\text{somme de termes}\\ \text{d'une suite arithmétique}} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme + dernier}}{2}}$$

Exemple :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 5001 = 2501 \times \frac{1 + 5001}{2}$$

1.5.4 Notation Σ (sigma)

La somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ est notée $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

Exemple 1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

Exemple 2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{1000} (2n + 1) =$

Exemple 3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j =$

Exemple 4. Pour une suite arithmétique (u_k), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k =$

1.6 Exercices

Exercice 1.1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 + 3$.
Calculer u_0, u_5 et u_{20}.

Exercice 1.2. Soit la suite (u_n) définie par le premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 3u_n - 2$, pour tout entier n.
Calculer u_2, u_5 et u_{20}.

Exercice 1.3. QCM
Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.
On propose l'algorithme suivant.

Entrer un nombre entier n Le multiplier par 5 Ajouter 10 Diviser par 2 Écrire le résultat final

Pour l'entier naturel n, on note u_n le résultat final. On définit ainsi une suite (u_n).

1. Les termes u_0, u_1 et u_2 sont dans cet ordre
   (a) 5 ; 10 ; 15 (b) 5 ; 7,5 ; 10 (c) 25 ; 27,5 ; 30
2. La formule donnant u_n en fonction de n est :
   (a) $u_n = 5n + 5$ (b) $u_n = \dfrac{5(n+10)}{2}$ (c) $u_n = \dfrac{5n+10}{2}$

Exercice 1.4. Pour les questions suivantes, on considère la suite (u_n) définie par son terme général, pour tout entier naturel n.

1. $u_n = 240 - 8n$; calculer u_2, u_{10} et u_{30}.
2. $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 25$, avec $u_0 = 100$; calculer les termes de rang 1 à 4, puis u_{30}.

Exercice 1.5. Pour les questions suivantes, on modélise la situation par une suite (u_n).
À chaque fois : préciser le terme initial ; écrire une relation de récurrence ; calculer les trois termes suivants.

1. Chaque mois Sofia gagne 70 euros de plus. Le revenu initial mensuel est 1200 €.
2. Chaque année, la valeur d'une automobile diminue de 8%. La valeur initiale est 25 000 €.
3. Une population de 100 000 habitants augmente chaque année de 5% du fait de l'accroissement naturel et diminue chaque année de 3 000 habitants du fait de l'émigration.

Exercice 1.6. Chaque année, une entreprise diminue son effectif de 8% et crée 45 nouveaux emplois. L'effectif initial est de 700 personnes.
On note $u_0 = 700$ et u_n est l'effectif la n-ième année.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Écrire un algorithme qui permet de calculer le terme de rang n de cette suite, pour tout entier naturel n.
3. En déduire u_{10}.

Exercice 1.7. Exercices du manuel : pages 24, 26, 27

Exercice 1.8. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{20} = 7$ et $u_{30} = 8$. Calculer sa raison, le premier terme u_0 et u_{100}.

Exercice 1.9. Combien de tuyaux sont empilés sachant que la rangée à terre en compte 50 (figure 1.1) ?

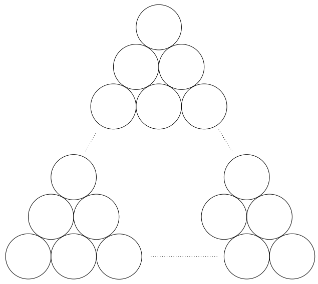

FIGURE 1.1 – Les tuyaux

Suppléments

Exercice 1.10. Pour chacune des suites définies ci-dessous : donner les quatre premiers termes ; écrire la relation liant u_4 à u_3, et celle liant u_n à u_{n-1}.

$$\text{a)} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases} \qquad ;\text{b)} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2^n} \end{cases}$$

Exercice 1.11. On considère la suite (X_n), définie pour tout entier naturel n par ses deux premiers termes $X_0 = 2$ et $X_1 = 3$, et la relation $X_{n+2} = 2X_{n+1} + X_n$. Calculer ses cinq premiers termes.