Corrigé de l'exercice. 9.7

1. $g : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3} = (x-1)^{-3} = \dfrac{1}{-2} \times \underbrace{(-2)}_{n} \times \underbrace{1}_{u'(x)} \underbrace{(x-1)^{-3}}_{(u(x))^{n-1}}$

   g est continue sur I=]1; +∞[(c'est l'inverse d'une fonction polynôme qui ne s'annule pas sur I). Elle admet une primitive G définie par

   $$G(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} = \frac{-1}{2(x-1)^2}$$

   $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^4} = (x-1)^{-4} = \dfrac{1}{-3} \times \underbrace{(-3)}_{n} \times \underbrace{1}_{u'(x)} \underbrace{(x-1)^{-4}}_{(u(x))^{n-1}}$

   Comme g, h est continue sur I=]1; +∞[. Elle admet une primitive H définie par

   $$H(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^{-3} = \frac{-1}{3(x-1)^3}$$

2. f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^4}$. Déterminons les nombres réels a et b tels que pour tout x dans I : $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x-1)^4}$.

   $$\begin{aligned} \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^4} &= \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^4} \\ &= \frac{ax+b-a}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

   On identifie $ax+b-a$ avec $1x+0$ (le numérateur de $f(x)$) :

   $$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases}$$

   Donc $\boxed{a = b = 1}$.

3. f est continue sur I=]1; +∞[(c'est un quotient de fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur I). Elle admet une primitive F. Comme $f(x) = g(x) + h(x)$, F est définie par

   $$F(x) = G(x) + H(x) + k = \frac{-1}{2(x-1)^2} + \frac{-1}{3(x-1)^3} + k$$

   où k est une constante réelle.

   On trouve k en écrivant que $F(2) = 7$:

   $$\frac{-1}{2(2-1)^2} + \frac{-1}{3(2-1)^3} + k = 7$$

   $$\frac{-1}{2} + \frac{-1}{3} + k = 7$$

   $$k = \frac{47}{6}$$

   $$\boxed{F(x) = \frac{-1}{2(x-1)^2} + \frac{-1}{3(x-1)^3} + \frac{47}{6}}$$

Corrigé de l'exercice. 9.8

Toutes les fonctions f sont continues (polynômes ou quotients de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle précisé). Elles admettent des primitives.

- $f(x) = x(x^2+5)^4 = \dfrac{1}{10} \times 5 \times (2x)(x^2+5)^4$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{10}(x^2+5)^5}$$

- $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^2} = \underbrace{\dfrac{-(2x+2)}{(x^2+2x)^2}}_{\frac{-v(x)}{v^2(x)}} \times \dfrac{-1}{2}$ a pour primitive sur $\mathbb{R} - \{0; -2\}$:

$$\boxed{F(x) = \frac{-1}{2(x^2+2x)}}$$

- $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}+x\right)^7\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right) = \dfrac{-1}{8} \times \underbrace{8}_{n} \times \underbrace{\left(-\dfrac{1}{x^2}+1\right)}_{u'(x)}\underbrace{\left(\dfrac{1}{x}+x\right)^7}_{(u(x))^{n-1}}$ a pour primitive sur $\mathbb{R} - \{0\}$:

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+x\right)^8}$$

- $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2} \times \underbrace{\dfrac{2x}{x^2-1}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

  — sur $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$, f admet pour primitive F définie par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

  — sur $]-1\ ;\ 1[$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

  On pourrait écrire : sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ f admet pour primitive F définie par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

- $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2} = \underbrace{\dfrac{-(-1)}{(3-x)^2}}_{\frac{-v'(x)}{v^2(x)}}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R} - \{3\}$, F définie par

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{3-x}}$$