Chapitre 12

Équations différentielles

12.1 Introduction, vocabulaire

$y' + y = 5$ ○

$y^2 + 3y' = 9(x^2 + 1)$ ○

$y'' + 25y = 0$ ○

$y' = x^2 + 3x + 7$ ○

$yy' = y''$ ○

$\sqrt{1 + y'^2} = 7x + 4$ ○

$f''(x) = 4f(x)$ ○

$y'(x) - 7y(x) = 0$ ○

$y'' + 2y' + y = 8$ ○

$y' = y$ ○

$x\dfrac{dy}{dx} + y = 10$ ○

$LC\dfrac{du^2}{dt^2} + RC\dfrac{du}{dt} + u = E$ ○

○ équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

○ équation différentielle linéaire du premier ordre homogène (sans second membre)

○ équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre

○ équation différentielle linéaire du second ordre homogène (sans second membre)

○ équation différentielle du premier ordre non linéaire

○ équation différentielle du second ordre non linéaire

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

La fonction inconnue est souvent notée y.

L'équation est dite homogène (ou sans second membre) quand tout ce qui concerne y (et ses dérivées) peut être écrit à gauche de $= 0$ et rien d'autre.

Une équation différentielle est du premier ordre si n'apparaissent pas de dérivées secondes ou troisièmes ou plus (apparaît seulement y' et éventuellement y).

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui sont solutions.

Exercice 12.1

12.2 Équation $y' = ay$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Elle est sans second membre, car elle s'écrit $y' - ay = 0$.

Proposition 33. *a est un réel. Les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions*

$$y : x \mapsto y(x) = Ce^{ax}$$

(C constante réelle)

Démonstration. Il est important de bien comprendre pourquoi les deux étapes sont indispensables.

1. Soit $C \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction

$$f : x \mapsto C\exp(ax)$$

est solution de $f' = af$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de exp et d'une fonction linéaire qui le sont.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = aC\exp(ax)$$

On a bien pour tout x :

$$af(x) = aC\exp(ax) = f'(x)$$

2. Soit f une solution dérivable sur $\mathbb{R}$ de $f' = af$. Considérons :

$$g : x \mapsto g(x) = \exp(-ax)f(x)$$

Comme f, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x) = -a \times \exp(-ax)f(x) + \exp(-ax)f'(x)$$

Comme $f'(x) = af(x)$:

$$g'(x) = -a \times \exp(-ax)f(x) + \exp(-ax)af(x) = 0$$

Donc g est une fonction constante : $g(x) = C$ pour tout x.
Ainsi, pour tout x,

$$C = \exp(-ax)f(x)$$

donc

$$f(x) = C \times \exp(ax)$$

□

Remarque 1. Il y a une infinité de solutions.

Remarque 2. La fonction nulle est une des solutions.

Remarque 3. Si $a = 0$, $y' = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions constantes.

Remarque 4. Cette équation est dite linéaire car : si y_1 et y_2 sont des solutions, $y_1 + y_2$ et αy_1 ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont aussi des solutions :

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2)' &= y_1' + y_2' \\ &= ay_1 + ay_2 \\ (y_1 + y_2)' &= a(y_1 + y_2)\end{aligned}$$

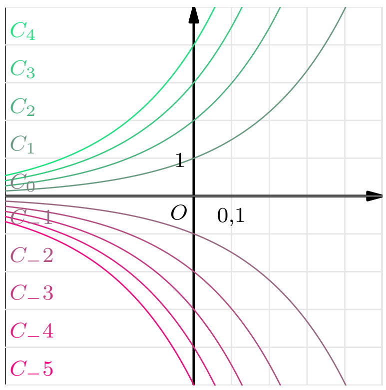
et

$$\begin{aligned}(\alpha y_1)' &= \alpha y_1' \\ &= \alpha a y_1 \\ (\alpha y_1)' &= a(\alpha y_1)\end{aligned}$$

Remarque 5. Cette équation apparaît quand on modélise des phénomènes où le taux de variation de la fonction mesuré à un instant donné est proportionnel à la valeur de la fonction au même instant.

Exemple : $y' = 4y$ admet pour solutions les fonctions $f_k : x \mapsto ke^{4x}$ avec k réel. Quelques solutions sont tracées ci-dessous :

Famille de fonctions définies par $f_k(x) = ke^{4x}$, où k est un nombre réel.



Exercices : 12.2 ; 12.3

12.3 Équation $y' = ay + b$

Cette équation est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre (b).

Proposition 34. $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$y : x \mapsto y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

Il existe une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$ pour x_0 et y_0 fixés.

Démonstration. 1. Soit $C \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction

$$f : x \mapsto C\exp(ax) - \frac{b}{a}$$

est solution de $f' = af + b$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de exp et d'une fonction linéaire qui le sont (plus une constante). Pour tout réel x :

$$f'(x) = aC\exp(ax)$$

On a bien pour tout x :

$$af(x) + b = a\left(C\exp(ax) - \frac{b}{a}\right) + b = f'(x)$$

2. Soit f une solution dérivable sur $\mathbb{R}$ de $f' = af + b$. Considérons :

$$g : x \mapsto g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$$

Comme f, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$ag(x) = af(x) + b = f'(x) = g'(x)$$

On sait depuis la proposition 33 que les solutions dérivables de $g' = ag$ sont les fonctions $x \mapsto C\exp(ax)$. Donc $g : x \mapsto C\exp(ax)$ et $f : x \mapsto C\exp(ax) - \dfrac{b}{a}$

3. Soit f une solution dérivable sur $\mathbb{R}$ de $f' = af + b$. Fixons x_0 et y_0 dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x_0) = y_0$. Ceci s'écrit :

$$C\exp(ax_0) - \frac{b}{a} = y_0 \qquad \text{d'où} \qquad C = (y_0 + \frac{b}{a})\exp(-ax_0)$$

Donc C est unique et f aussi.

□

Variante : les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $y + y_p$ où y est solution de l'équation $y' = ay$ et où y_p est une solution particulière (constante) de l'équation complète.

Exemple : Les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de

$$y' = 2y + 3$$

sont les fonctions $x \mapsto y(x) = Ce^{2x} - \dfrac{3}{2}$ (où $C \in \mathbb{R}$).
La solution telle que $y(0) = 0$ est

$$y = \frac{3}{2}(e^{2x} - 1)$$

Exercice : 12.4

12.4 Équation $y' = ay + f$

Proposition 35. a est un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.

Les solutions dérivables sur I de l'équation différentielle $y' = ay + f$ (a réel) sont les fonctions

$$x \mapsto y(x) = Ce^{ax} + y_p(x)$$

où y_p est une solution particulière.

Exemple : on veut résoudre l'équation (E) :

$$\text{(E)} \qquad y' + 3y = \cos(x)$$

Si une solution particulière n'est pas évidente (comme ici), l'énoncé nous en donnera une (ici : $y_p(x) = \dfrac{1}{10}(3\cos(x) + \sin(x))$ et il faudra vérifier que c'est bien une solution. Puis on utilise la proposition 35.

- y_p est bien une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E) :

- Donc les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) =$$

Exercices : 12.5 ; 12.6 ; 12.7 ; 12.8

Remarque : cas où $a = 0$:

$\boxed{\text{résoudre l'équation différentielle } y' = f \text{ revient à trouver les primitives de } f}$.

Exercices : 12.9 ; 12.10

12.5 Exercices

Exercice 12.1.
1. Vérifier que la fonction $y : x \mapsto y(x) = e^{-x} + 5$ est une solution de la $1^{\text{ère}}$ équation différentielle de la page 258.
2. Vérifier que la fonction $y : x \mapsto y(x) = 3x$ est une solution de la $2^{\text{ème}}$.
3. Vérifier que la fonction $y : x \mapsto y(x) = 7\cos(5x)$ est une solution de la $3^{\text{ème}}$.
4. Résoudre la $4^{\text{ème}}$.

Exercice 12.2. 95 page 303 du livre

Exercice 12.3. 100 page 303 du livre

Exercice 12.4. Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée

1. $y' = -2y + 5$ et $y(0) = 2$
2. $5y' + 2y = 1$ et $y(1) = -1$
3. $3y' = y - 3$ et $y(-1) = 3$

Exercice 12.5. 115 page 304 du livre

Exercice 12.6. 116 page 304 du livre (corrigé)

Exercice 12.7. On considère l'équation différentielle : (E) : $\quad y' - 2y - e^x = 0$.

1. Rechercher une solution particulière de (E) de la forme $g(x) = ke^x$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des fonctions solutions de l'équation (E)

Exercice 12.8. Loi de refroidissement de Newton

On a pu établir que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps et la température ambiante. Le coefficient k de proportionnalité dépend de la nature de ce corps.

Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25°C est placé à l'extérieur, où la température est de 8°C. On désigne par $\theta(t)$ la température de ce corps à l'instant t, exprimé en seconde.

1. Justifier que la fonction θ vérifie une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ dont on précisera les coefficients a et b en fonction de k.
2. En déduire que, pour tout réel t strictement positif, $\theta(t) = 8 + 17e^{kt}$.
3. On observe qu'au bout de deux minutes, la température du solide est de 20°C.
   (a) Déterminer la valeur du réel k.
   (b) Au bout de combien de temps, la température du solide sera-t-elle de 15°C ?

Exercice 12.9. 76 page 301 du livre

Exercice 12.10. 83 page 302 du livre (corrigé)

Exercice 12.11. 121 page 305 du livre

Exercice 12.12. 124 page 306 du livre

Exercice 12.13. 131 page 309 du livre

Exercice 12.14. Soit (E) l'équation $y' + 2y = 4x + 3$.

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que si la fonction f est solution de (E), alors la fonction f' est solution de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 2y = 4$.
2. Résoudre (E_1) et en déduire que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto 2x + \frac{1}{2} + Ke^{-2x}$, où K est une constante réelle.
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 12.15. Soit l'équation différentielle : $y' = -3y + 4e^{-2x} \qquad (E)$

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \lambda e^{-2x}$ soit solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle $(E') \qquad y' = -3y$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E').
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

12.6 Supplément. Notation différentielle. Méthode d'Euler

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.

Au voisinage de x_0, la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est très proche de $\mathscr{C}_f$. Une équation de $\mathscr{T}$ est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

f est dérivable en x_0, donc il existe une fonction φ telle que

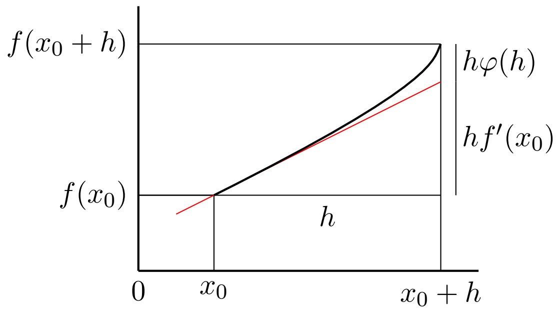
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x - x_0) = 0$.

En posant $h = x - x_0$, on peut ainsi écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h)$$

où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.



Notations utilisées par les physiciens (entre autres)

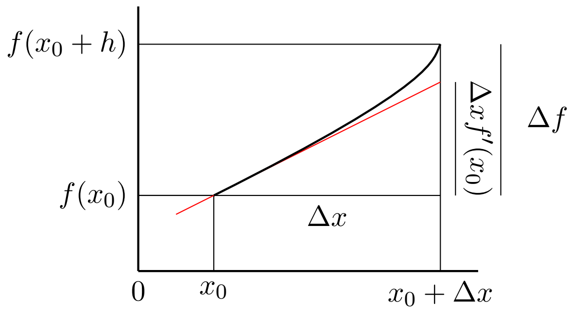
Posons $h = \Delta x$ et $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$; cela s'écrit :

$$(\Delta f)_{x_0} = f'(x_0)\Delta x + \varphi(\Delta x)\Delta x \qquad \text{avec} \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = 0$$

A la limite, quand $\Delta x \to 0$, on écrit :

$$df_{x_0} = f'(x_0)dx \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_{x_0}}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$



Les physiciens écrivent

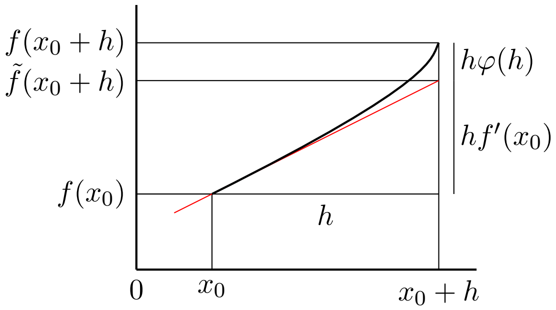
$$\frac{df}{dx} = f' = \dot{f} \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = f'' = \ddot{f} \qquad \frac{d^3 f}{dx^3} = f^{(3)}$$

La méthode d'Euler

Si la fonction f est inconnue mais si on connaît $f'(x)$ pour tout x de I et une valeur de f (par exemple $f(x_0)$), on peut calculer des valeurs approchées de $f(x_0+h)$ puis $f(x_0+2h)$, $f(x_0+3h)$, en choisissant un pas h assez petit. C'est la méthode d'Euler.

On peut alors tracer une fonction affine par morceaux qui approche la courbe représentative de f :

1. On choisit un pas h.
2. On part du point $A_0(x_0; f(x_0))$.
3. On place $A_1(x_0+h; \tilde{f}(x_0+h))$, en prenant
$$\tilde{f}(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0)$$
On trace $[A_0A_1]$.
4. On place $A_2(x_0+2h; \tilde{f}(x_0+2h))$, en prenant
$$\tilde{f}(x_0+2h) = \tilde{f}(x_0+h) + hf'(x_0+h)$$
On trace $[A_1A_2]$.
5. ...



Exemple : une fonction f est inconnue mais on connaît sa dérivée sur $]0; +\infty[$: f' : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Cette dérivée est continue donc admet des primitives. Faisons comme si on ne connaissait pas de primitive de f'.

Notons f la primitive de f' sur $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$.

On peut tracer point par point une approximation affine de la représentation graphique de f. On notera $\tilde{f}$ L'approximation de f.

Choisissons un pas de 0,5.

Partons de $x = 1$.

$$\tilde{f}(1{,}5) - f(1) = f'(1)(1{,}5-1)$$

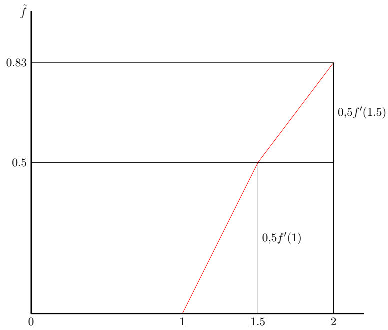
donne

$$\tilde{f}(1{,}5) = f'(1)(1{,}5-1) + f(1) = 0{,}5$$

$$\tilde{f}(2) - \tilde{f}(1{,}5) = f'(1{,}5)(2-1{,}5)$$

donne

$$\tilde{f}(2) = f'(1{,}5)(2-1{,}5) + \tilde{f}(1{,}5) \simeq 0{,}83$$



Voici les valeurs trouvées par un tableur :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\tilde{f}(x)$	0,00	0,50	0,83	1,08	1,28	1,45	1,59	1,72	1,83
$f'(x)$	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25	0,22	0,2

x	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
$\tilde{f}(x)$	1,93	2,02	2,10	2,18	2,25	2,32	2,38	2,44	2,50	2,55
$f'(x)$	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13	0,13	0,12	0,11	0,11	0,1

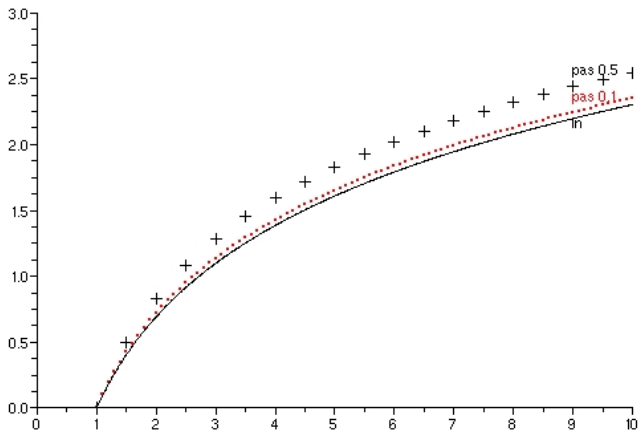


FIGURE 12.1 – Méthode d'Euler. Fonction de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$

Avec un pas de 0,1 on obtient une erreur sur $f(10)$ inférieure à cinq centièmes.

Exercice 12.16. A l'aide de la méthode d'Euler, tracer une courbe approchée de la fonction f de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$.