Chapitre 11

Combinatoire et dénombrement

« Grossièrement parlant, la combinatoire est l'art de dénombrer sans compter vraiment. »[1]

11.1 Ensembles finis

On s'intéresse ici à des ensembles qui ont un nombre fini d'éléments.

11.1.1 Cardinal

Définition 37. Le cardinal d'un ensemble E fini est le nombre d'éléments de E. On le note $\text{card}(E)$.

Exemples :

$E = \{a,b,c,d\}$; $\text{card}(E) = 4$

$F = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| \leqslant 10\}$; $\text{card}(F) = 21$

Propriété 27 (Principe additif)**.** A et B sont deux parties (sous-ensembles) disjointes d'un ensemble fini E.
Alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Exemple : $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{7,8\}$.

$\text{card}(A) = 3$ et $\text{card}(B) = 2$

$A \cup B = \{1,2,3,7,8\}$

$\text{card}(A \cup B) = 5$ est bien égal à $\text{card}(A) + \text{card}(B)$...

Remarque 1. A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Remarque 2. Si A et B ne sont pas disjoints, on sait que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Remarque 3. La propriété est valable pour toute réunion d'ensembles disjoints deux à deux.

Exercices : 11.1 ; 11.2

1. Terry Pratchett, Ian Stewart et Jack Sidney Cohen. *La science du Disque-monde II Le globe.* Les annales du disque-monde. Nantes : l'Atalante, 2009, 1 vol. (493 p.) isbn : 978-2-84172-463-5, p. 63

11.1.2 Produit cartésien

Définition 38. Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x,y) où x est un élément de E et y est un élément de F. On le note $E \times F$.

$$E \times F = \{(x,y) \ ; \ x \in E, \ y \in F\}$$

Remarque : un couple est ordonné : $E \times F$ n'est pas le même ensemble que $F \times E$.

Exemple 1. Avec $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2\}$,

$$E \times F =$$

Exemple 2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. C'est l'ensemble des coordonnées des points du plan muni d'un repère ... cartésien.

On définit de même le produit cartésien de trois ensembles (on parle de triplets et de n ensembles (on parle de n-uplets ou de n-listes).

Propriété 28 (Principe multiplicatif)**.** n et p étant deux entiers naturels, si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$, alors $\text{card}(E \times F) = n \times p$.

Exemple : pour l'exemple 1 ci-dessus, $\text{card}(E \times F) =$

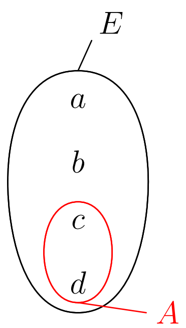
Exercices : 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7

11.1.3 Partie d'un ensemble

Définition 39. Un ensemble A est une partie d'un ensemble E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E.

On dit aussi alors que A est un sous-ensemble de E et que A est inclus dans E. On note l'inclusion :

$$A \subset E$$



Exemple : $E = \{a,b,c,d\}$, $A = \{c,d\}$.
A est une partie de E.
On écrit $A \subset E$.

Remarque : on dit aussi que $E \subset E$: E est une partie de E. $\emptyset$ est aussi une partie de E.

11.2 Dénombrement

Un outil important pour comprendre le principe multiplicatif : l'arbre.

- Choix dans des ensembles distincts.

  À la cantine, on compose un menu par le choix d'une entrée dans l'ensemble des 5 entrées, puis d'un plat dans l'ensemble des 4 plats, puis d'un dessert dans l'ensemble des 6 desserts. Combien de menus différents peut-on composer ?

- Choix successifs dans un ensemble s'amenuisant.

  Une assemblée est composée de 16 personnes. De combien de façons peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier ?

Exercices : 11.8 ; 11.9 ; 11.10 ; 11.11.

11.3 Factorielles

Définition 40. n est un nombre entier naturel non nul. On appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Exemples :

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$1! = 1$

$13! = 6\,227\,020\,800$

Remarque : $0! = 1$

Culture : $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Calculatrice :

Exercices : 11.12 ; 11.13 ; 11.14 ; 11.15 ; 11.16

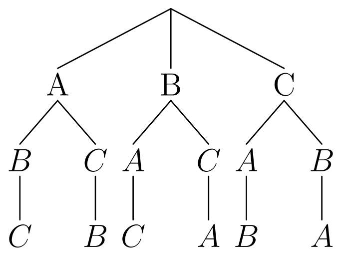
11.4 Permutations

Définition 41. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une n-liste (un n-uplet) d'éléments distincts de E est appelée permutation de E.

Exemple 1. Il existe $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutations de $\{A,B,C\}$. Pour remplir les 3 cases

A	B	C		B	A	C		C	A	B
A	C	B		B	C	A		C	B	A

on a 3 choix pour remplir la première, 2 choix pour la deuxième, et un seul pour la dernière.



Exemple 2. Une permutation de $\{C,R,A,I,E\}$ est (I,C,A,R,E). Une autre est (E,I,C,A,R).

Théorème 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments (de cardinal n).

Démonstration. Il y a n façons de choisir le premier élément, puis $(n-1)$ façons de choisir le deuxième, puis ..., puis une façon de choisir le dernier. □

Exemples :
— Il existe 5! anagrammes de CRAIE.
— Il existe 10! manières de placer 10 personnes sur une table à 10 places.
$10! =$

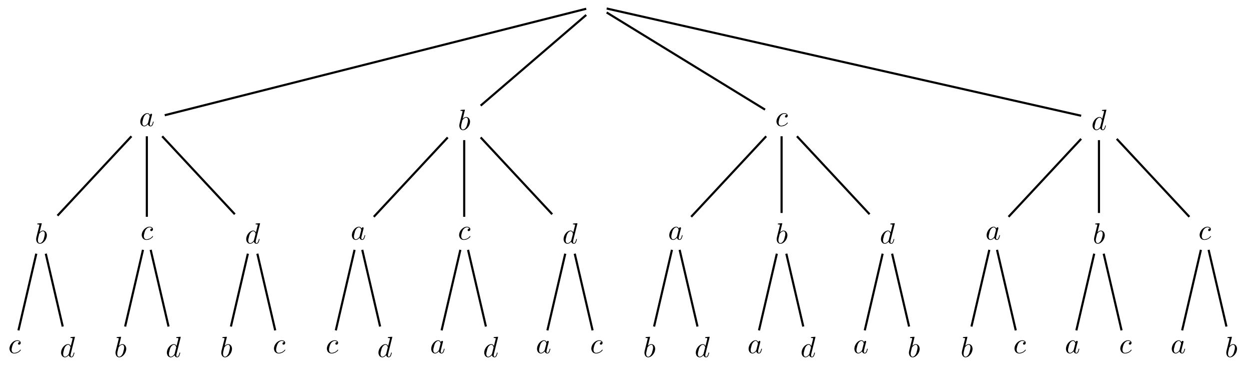
11.5 Arrangements

Définition 42. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Un arrangement de p éléments de E est une liste ordonnée de p éléments de E (une p-liste, un p-uplet) distincts deux à deux.

Remarque 1. Un arrangement de p éléments de E est aussi appelé une p-liste sans répétition.

Remarque 2. Les anglo-saxons parlent de permutations de p éléments pris parmi n, sans répétition (d'où le $n\mathrm{P}r$ sur certaines calculatrices).

Exemple : Un arrangement de 3 éléments de $\{a; b; c; d\}$ est adb. Un autre est bad. Un autre est bac. Combien en existe-t-il ?



Il y a 4 façons de choisir le premier. Puis 3 pour le deuxième et 2 pour le troisième. Donc le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 4 est $4 \times 3 \times 2 = 24$.

> **Théorème 16.** Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est
>
> $$\mathrm{A}_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$
>
> **c'est le nombre de façons de choisir p objets différents parmi n, en tenant compte de l'ordre du choix**.

Sur l'exemple précédent, on a $n = 4$, $p = 3$ et :

$$\underbrace{4}_{n} \times \underbrace{3}_{n-1} \times \underbrace{2}_{n-p+1} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

Plus généralement, le produit $n(n-1)\dots(n-p+1)$ comporte bien p termes :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \underbrace{n}_{\text{terme } 0} \underbrace{(n-1)}_{\text{terme } 1}\dots\underbrace{(n-(p-1))}_{\text{terme } p-1}$$

Exemple : il y a $A_{25}^3 = 25 \times 24 \times 23 = 13\,800$ façons de choisir un·e président·e, un·e trésorier·e, un·e secrétaire dans un groupe de 25 personnes.

Calculatrice : $\boxed{nPr}$ ou nArrangement$p$ ou …

Situations :
— Le podium d'une course est un arrangement de l'ensemble des participants.
— MOT est un arrangement de l'alphabet.

11.6 Combinaisons

Exemple 1. De combien de façons peut-on choisir 3 lettres parmi $\{a,b,c,d\}$, sans tenir compte de l'ordre ?

Dans l'arbre du paragraphe précédent, on voit que le triplet (a,b,c) est compté $3! = 6$ fois : *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Les 24 triplets sont tous comptés 6 fois. Il y a donc $\frac{24}{6} = 4$ façons de choisir trois lettres parmi 4.

Exemple 2. Dans une assemblée de 10 personnes, de combien de façons peut-on choisir un groupe de 3 ?

Un arbre permet de dénombrer $10 \times 9 \times 8$ triplets possibles, mais chaque triplet est compté $3!$ fois. Il existe donc $\dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$ groupes possibles.

Définition 43. E est un ensemble non vide à n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. Une combinaison à p éléments de l'ensemble E est une partie de E à p éléments.

Remarque : une partie étant un ensemble, on ne tient pas compte de l'ordre : $\{a,b,c\} = \{b,a,c\}$.

Théorème 17. Le nombre de combinaisons à p éléments de E, noté $\dbinom{n}{p}$, vérifie : $\dbinom{n}{0} = 1$ et pour $p \geqslant 1$:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Remarque 1 : il y a une seule partie vide … $\binom{n}{0} = 1$ et une seule partie pleine : $\binom{n}{n} = 1$

Remarque 2 : **$\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ». C'est le nombre de façons de choisir p objets parmi n, sans tenir compte de l'ordre.**

Remarque 3 : $\binom{n}{1} = n$

Remarque 4 : $\binom{n}{p}$ se notait C_n^p. (Dans les calculettes : $\boxed{nCr}$ ou nCombinaison$p$ ou …)

Exemple 1. $\binom{50}{4} = \dfrac{50 \times 49 \times 48 \times 47}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 230\,300$

Exemple 2. Dans une classe de 25 personnes, on peut former $\binom{25}{3} = 2\,300$ groupes différents de 3.

Propriété 29. Le nombre des parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n.

Démonstration. On numérote les éléments de 1 à n.

À chaque partie de E donnée on peut associer un unique n-uplet : on écrit 1 à la position i si l'élément i est dans cette partie, 0 sinon.

Exemples :

(0,1,0,1, 0, … 0) correspond à la partie qui contient les éléments 2 et 4 ;

Le n-uplet dont toutes les valeurs sont 0, (0, … 0), correspond à l'ensemble vide.

Le nombre de ces n-uplets est, d'après le principe multiplicatif, 2^n. □

Remarque 1. On a donc

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n}$$

Remarque 2. Le nombre des parties d'un ensemble à n éléments est aussi

- le nombre de n-uplets de $\{0,1\}$;
- le nombre de mots de longueur n sur un alphabet à deux lettres ;
- le nombre de chemins dans un arbre binaire à n niveaux ;
- le nombre d'issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.

11.7 Coefficients binomiaux

Ce sont les $\binom{n}{p}$.

Propriété 30. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$: $\boxed{\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}}$

Pour $0 \leqslant p < n$: $\boxed{\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}}$

Démonstration. Dans un ensemble à n éléments, il y a autant de parties à p éléments que de parties à $(n-p)$ éléments. En effet, à chaque partie comptant p éléments, on peut associer son complément qui en comporte $(n-p)$. Ou preuve par les factorielles.

Seconde propriété : preuve par les factorielles, ou : on isole un élément a d'un ensemble de $n+1$ éléments (figure 11.1). Pour choisir $p+1$ éléments parmi les $n+1$,
— ou bien on prend a et p éléments parmi les n restants.
— ou bien on ne prend pas a et on choisit $p+1$ éléments parmi n (tous sauf a)

□

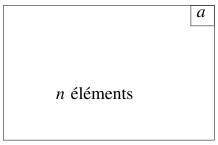


FIGURE 11.1 – Un ensemble de $n+1$ éléments

Pour retrouver les coefficients binomiaux : le triangle de Pascal

Soit

$\binom{0}{0}$						1					
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					1	1				
$\binom{2}{0}$	$\boldsymbol{\binom{2}{1}}$	$\boldsymbol{\binom{2}{2}}$				1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$			
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\boldsymbol{\binom{3}{2}}$	$\binom{3}{3}$			1	3	$\boxed{3}$	1		
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		1	4	6	4	1	
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	1	5	10	10	5	1

$$\begin{tikzcd} \boxed{\dbinom{n}{p}} \arrow[r, "+"] & \boxed{\dbinom{n}{p+1}} \arrow[d, "="] \\ & \boxed{\dbinom{n+1}{p+1}} \end{tikzcd}$$

11.8 Exercices

Exercice 11.1. 24 page 44 du livre

Exercice 11.2. 55 page 46 du livre

Exercice 11.3. Soit $E = \{a; b; c\}$. Donner tous les éléments de E^3, c'est-à-dire de $E \times E \times E$. Que vaut card $\left(E^3\right)$?

Exercice 11.4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on désigne par

A l'ensemble des points de $(O; \vec{\imath})$ d'abscisses entières allant de 0 à 5 ;

B l'ensemble des points de $(O; \vec{\jmath})$ d'abscisses entières allant de 0 à 3 ;

C l'ensemble des points de $(O; \vec{k})$ d'abscisses entières allant de 0 à 2.

Déterminer card$(A \times B \times C)$.

Exercice 11.5. Que vaut card $\left(\{0; 1\}^5\right)$?

Exercice 11.6. On note $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et $F = \{A; B\}$.

Pour ouvrir la porte d'un immeuble, on doit taper un code : 3 chiffres de E puis une lettre de F.

Quel est l'ensemble des codes possibles ? son cardinal ?

Exercice 11.7. Qu'affiche le programme suivant ?

```
def prod(L):
    n = len(L)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            for k in range(n):
                print(L[i],L[j],L[k])

L = ['a','b','c']
prod(L)
```

Exercice 11.8. Une classe de 31 élèves choisit deux délégués élèves. Les 31 élèves de cette classe sont répartis selon trois catégories : 18 internes, 7 externes et 6 demi-pensionnaires. Combien de groupes de deux délégués sont tels que les élèves appartiennent à deux catégories différentes ?

Exercice 11.9. Un particulier souhaite compléter l'équipement électroménager de sa cuisine avec un four à micro-ondes, un lave-vaisselle et un robot multifonctions. Un magasin lui propose

7 modèles de four à micro-ondes, dont 3 de marque française ;

4 modèles de lave-vaisselle, dont 1 de marque française ;

7 modèles de robot, dont 4 de marque française.

1. Dénombrer les choix possibles d'équipement de ce particulier.
2. Dénombrer les choix d'équipements tels que :
   (a) les trois éléments achetés soient de marque française ;

(b) au moins deux des trois éléments achetés soient de marque française.

Exercice 11.10. Un portemanteau comporte cinq patères alignées. Sans mettre deux manteaux sur la même patère, combien a-t-on de dispositions, pour :

1. deux manteaux ;
2. cinq manteaux.

Exercice 11.11. 29 page 44 du livre

Exercice 11.12. Vrai ou faux ?

(a) $\dfrac{6!}{4!} = 30$; (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n)! = 2n!$; (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

Exercice 11.13. 33 page 45 du livre

Exercice 11.14. 32 page 45 du livre

Exercice 11.15. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{3}{5! \times 3!} + \dfrac{4}{7!}$

(b) $\dfrac{2}{9!} + \dfrac{2}{11!} - \dfrac{2}{10!}$

(c) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

(d) $\dfrac{(7!)!}{7!}$

(e) $\dfrac{2}{n!} + \dfrac{2}{(n+2)!} - \dfrac{2}{(n+1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(f) $\dfrac{10!}{7!}$ puis $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $p \leqslant n$.

Exercice 11.16. Écrire la fonction factorielle en python, qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie $n!$.

Exercice 11.17. Un circuit touristique comprend la visite de cinq villes A, B, C, D et E.
Dénombrer les ordres de visites possibles.
Combien de circuits sont tels que D soit la troisième ville visitée ?
Combien de circuits sont tels que la ville A soit visitée avant la ville D ?

Exercice 11.18. 37 page 45 du livre

Exercice 11.19. 40 page 45 du livre

Exercice 11.20. Lorsqu'on permute les lettres d'un mot, on obtient une anagramme de ce mot.

1. Dénombrer les anagrammes du mot SPORTIF.
2. Dénombrer les anagrammes du mot SPORTIF :
   (a) commençant par une consonne ;
   (b) commençant et finissant par une consonne ;
   (c) commençant par une voyelle ;
   (d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;
   (e) commençant par RO.
3. Dénombrer les anagrammes du mot SPORTIFS.

Exercice 11.21. Dénombrer les anagrammes du mot EXERCICE.

Exercice 11.22. 99 page 50 du livre

Exercice 11.23. 100 page 50 du livre

Exercice 11.24. 111 page 52 du livre

Exercice 11.25. 67 page 47 du livre. Cent mille milliards de poèmes : « de la lecture pour près de deux cents millions d'années ».

Exercice 11.26. Un groupe de 24 personnes, 14 hommes et 10 femmes, doit prendre un car pour effectuer une excursion. Par suite d'un malentendu, il se présente un car ne comportant que 12 places. Il est décidé que 7 hommes et 5 femmes prendront part à l'excursion.

1. Combien peut-on former de groupes de 7 hommes et 5 femmes ?
2. Si M. X et Mme Y préfèrent ne pas être dans le même groupe d'excursion, combien de groupes peut-on constituer ?

Exercice 11.27. Dans un jeu de 32 cartes (toutes différentes), on appelle main tout ensemble de quatre cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y-a-t-il de mains contenant le valet de trèfle ,
3. Combien y-a-t-il de mains contenant un seul as ?
4. Combien y-a-t-il de mains contenant au moins un roi ?

Exercice 11.28. On dispose de huit boules dans une urne, trois noires, deux blanches, trois rouges.

1. On tire simultanément trois boules de l'urne.
   (a) De combien de façons différentes peut-on faire le tirage ?
   (b) De combien de façons différentes peut-on tirer trois boules dont deux et deux seulement sont noires ?
   (c) De combien de façons différentes peut-on tirer trois boules dont l'une au moins est noire ?
2. On tire simultanément deux boules de l'urne. De combien de façons différentes peut-on tirer deux boules de la même couleur ?

Exercice 11.29. On tire cinq cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. cinq piques ?
2. exactement quatre cœurs ?
3. exactement deux trèfles ?

Exercice 11.30. Une boîte contient 41 transistors, dont 5 sont défectueux. On en prend 3 au hasard. Quelle est la probabilité que tous les trois soient défectueux ? Que deux au moins soient défectueux ? On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de ces probabilités.

Exercice 11.31. Pour réviser : 7 à 14 page 41 du manuel

Exercices supplémentaires

Exercice 11.32. Établir la formule

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

par le calcul.

Exercice 11.33. Triangle de Pascal (tableur et Python) : page 43 du livre

Exercice 11.34. 106 page 51 du livre (listes, append)

11.8.1 Exercices pas donnés

Exercice 11.35. On dispose de six jetons noirs numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6 et de trois jetons blancs numérotés 7, 8, 9. On tire rois jetons sans remise.

1. Combien d'ensembles différents de trois jetons peut-on former de cette manière ?
2. Combien de nombres différents de trois chiffres peut-on former ?
3. Même question qu'au (1), mais chaque ensemble doit contenir deux jetons noirs et un jeton blanc.

Exercice 11.36. Un conseil est formé de cinq hommes et huit femmes. Un bureau de quatre membres doit être désigné, et il doit comporter au moins une femme.

1. Combien de bureaux peut-il être formé, s'ils doivent comporter exactement un homme ?
2. Combien de bureaux peut-il être formé s'ils doivent comporter au moins un homme ?
3. Combien de bureaux peut-il être formé s'ils doivent comporter exactement deux femmes ?

Exercice 11.37. À l'aide des lettres du mot JACINTHE, combien peut-on former

1. de mots de six lettres ?
2. de mots de six lettres dont la deuxième et la dernière sont des voyelles et les quatre autres des consonnes ?
3. de mots de six lettres comportant deux voyelles et quatre consonnes ?

Exercice 11.38. Avec les lettres du mot GESTION employées une fois chacune, combien peut-on former de « mots » de sept lettres ? Parmi ces mots, combien finissent par une voyelle ?

Exercice 11.39. Un joueur de bridge reçoit 13 cartes d'un jeu de 52. Quelle est la probabilité pour lui d'avoir

1. exactement un cœur ?
2. au moins un cœur ?

Exercice 11.40. Dans une course comportant 18 partants, quelle est la probabilité pour un joueur jouant au hasard de toucher le tiercé dans l'ordre ? dans le désordre ?

Exercice 11.41. Une urne contient 7 boules noires et 8 boules blanches. On tire simultanément 3 boules au hasard. Quelle est la probabilité de trouver parmi elles au moins une boule noire ?

Exercice 11.42. Un sac contient 5 jetons portant respectivement les lettres a, i, u ,f ,g. On tire successivement les 5 lettres, et on les aligne pour former un mot. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. le mot finit par une consonne ;
2. le mot commence par une voyelle ;
3. la première et la dernière lettre sont des voyelles ;
4. la première et la dernière lettre sont des consonnes.

Exercice 11.43. Un lot de 50 appareils en comporte 6 défectueux. Un échantillon de 5 appareils est prélevé au hasard. Quelle est la probabilité que tous les cinq soient défectueux ? que deux au moins soient défectueux ?

Exercice 11.44. Une entreprise de construction compte 20 compagnons plus 10 intérimaires. Des 30, 14 ont le permis poids- lourds, dont 8 ne sont pas intérimaires.

Combien d'intérimaires n'ont pas le permis poids-lourd ?

On forme une équipe de 6 ouvriers pris au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'elle ne comprenne aucun intérimaire.
2. Calculer la probabilité qu'aucun n'ait le permis poids-lourds.
3. Calculer la probabilité que deux ouvriers exactement aient le permis poids-lourd.
4. Calculer la probabilité qu'au moins deux aient le permis poids-lourd.
5. On note X le nombre d'intérimaires de cette équipe de 6. Donner la loi de probabilité de X. Quel est le nombre moyen d'intérimaires dans ces équipes ?

Exercices supplémentaires de dénombrement

Exercice 11.45. On considère un jeu classique de 52 cartes et on appelle main un ensemble formé de 13 cartes du paquet.

1. Déterminer le nombre de mains comportant exactement 2 piques.
2. Déterminer le nombre de mains comportant au moins 2 piques.
3. Déterminer le nombre de mains comportant exactement 2 dames.
4. Déterminer le nombre de mains comportant exactement 2 piques et 2 dames.
5. Déterminer le nombre de mains comportant exactement 2 piques ou 2 dames.

Exercice 11.46. Un code d'entrée dans un immeuble est constitué par 2 lettres prises parmi A, B, C, D et de 4 chiffres (pris parmi tous les chiffres possibles), chacun des éléments pouvant être répété.

1. Combien de codes différents peut-on former si les 2 lettres peuvent occuper n'importe quelle place ?
2. Combien de codes différents peut-on former si les lettres occupent les deux premières places ? On se place dans ce cas par la suite.
3. Combien de codes peut-on former avec exactement deux fois le chiffre 7 ?
4. Combien de codes peut-on former avec au moins deux éléments identiques ?
5. Combien de codes peut-on former avec le produit des chiffres égal à 84 ?

Exercice 11.47. Dans un sac, il y a 10 jetons blancs identiques et 5 jetons noirs identiques. On tire les 15 jetons successivement et sans remise du sac.

1. Combien de résultats différents y a-t-il ?
2. Combien y a-t-il de résultats avec un jeton blanc en 8ème position ?
3. Combien y a-t-il de résultats avec le premier jeton blanc en 3ème position ?
4. Combien y a-t-il de résultats avec les 5 jetons noirs côte à côte ?

Exercice 11.48. On lance simultanément 5 dés équilibrés. Quelle est la probabilité

1. d'obtenir une paire (exactement deux dés identiques) ?
2. d'obtenir une suite de 5 nombres consécutifs ?

Exercice 11.49. Une grenouille monte un escalier de 13 marches. À chaque saut, elle monte d'une marche ou de 2 marches. Combien de manières différentes a-t-elle pour faire sa montée ?