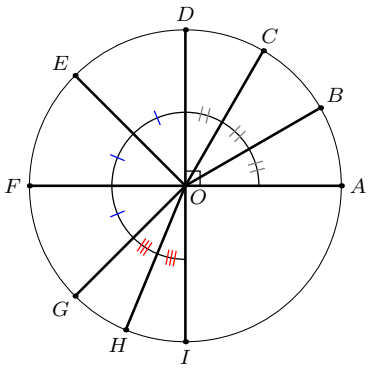
Chapitre 10

Fonctions trigonométriques

10.1 Mesures d'un angle orienté

Exercice 10.1. On a représenté un cercle de rayon 1. Quelle est son périmètre ? Indiquer la longueur des arcs

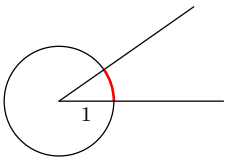


$\widehat{AF}$:
$\widehat{AD}$:
$\widehat{BC}$:
$\widehat{DE}$:
$\widehat{DG}$:

$\widehat{HI}$:
$\widehat{AI}$:
$\widehat{AE}$:
$\widehat{FH}$:
$\widehat{CE}$:

10.1.1 Le radian

La mesure en radians d'un angle est la longueur de l'arc intercepté sur un cercle de rayon 1.



Exemples :
— Un angle plat mesure
— Un angle droit mesure
— Dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent
— La mesure en radians d'un angle de 30° est

La conversion entre degrés et radians s'effectue à l'aide d'un tableau de proportionnalité :

π	180°
?	30°

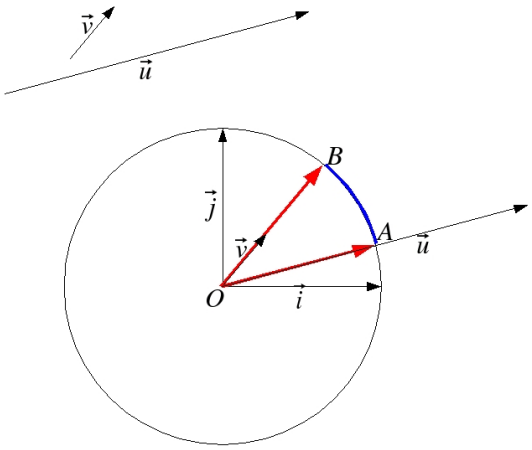
Exercice 10.2.
1. Convertir en radians les mesures d'angles : 30° ; 120° ; 135° ; 75° ; 170° ; 1°
2. Convertir en degrés les mesures d'angles : $\frac{\pi}{4}$ rad ; $\frac{\pi}{5}$ rad ; $\frac{7\pi}{18}$ rad ; 1 rad ; 3,14 rad

10.1.2 Angle orienté de vecteurs

Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon 1, de centre O, orienté. Le sens positif (direct) est le sens contraire des aiguilles d'une montre. $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

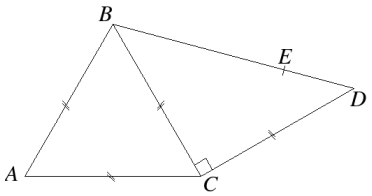
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs du plan (non nuls), on désigne par

- A le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires et de même sens ;
- B le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{OB}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires et de même sens.



On dit qu'*une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs* $(\vec{u},\vec{v})$ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Cette mesure est positive si de A à B on parcourt le cercle dans le sens direct, négative sinon.

Exemples :



$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \quad [2\pi]$

$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}) = \quad [2\pi]$

$(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}) = \quad [2\pi]$

$(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}) = \quad [2\pi]$

$(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}) = \quad [2\pi]$

Remarques :

- si α est une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$, $\alpha+2k\pi$ en est une autre pour tout $k \in \mathbb{Z}$: une mesure est définie à $2k\pi$ près (modulo 2π). On écrit :

$$(\vec{u},\vec{v}) = \alpha + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad (\vec{u},\vec{v}) = \alpha\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad (\vec{u},\vec{v}) = \alpha \bmod 2\pi$$

- On confond l'angle de vecteurs et sa mesure.

La mesure principale de $(\vec{u},\vec{v})$ est celle comprise dans $]-\pi;+\pi]$.

Exercice 10.3. Déterminer la mesure principale des angles orientés de vecteurs ayant comme mesure : 7π ; -1000π ; $\dfrac{2025\pi}{4}$; $-\dfrac{500\pi}{3}$; 100 ; -25

10.2 Définition des fonctions trigonométriques

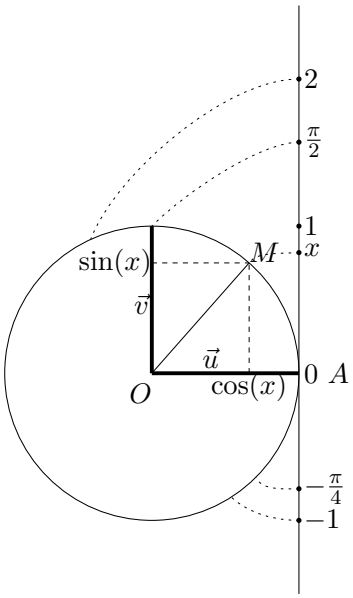
On les définit à l'aide du cercle trigonométrique. On les appelle aussi fonctions circulaires.

On « enroule » la droite réelle sur le cercle trigonométrique de rayon 1, de périmètre 2π.

À un nombre réel x, on associe ainsi un unique point du cercle, M.

Par définition :

- l'abscisse de M dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus de x, noté $\cos(x)$.
- l'ordonnée de M dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est le sinus de x, noté $\sin(x)$.



On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Conséquence immédiate : pour tout réel x, $\boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$ et $\boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$

Supplément : pour tout réel x distinct de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, (où $k \in \mathbb{Z}$), on définit la tangente de x par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

10.2.1 Une formule

Pour tout réel x :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Remarque : $\cos^2 x$ est la notation habituelle pour $(\cos(x))^2$.

10.2.2 Valeurs remarquables

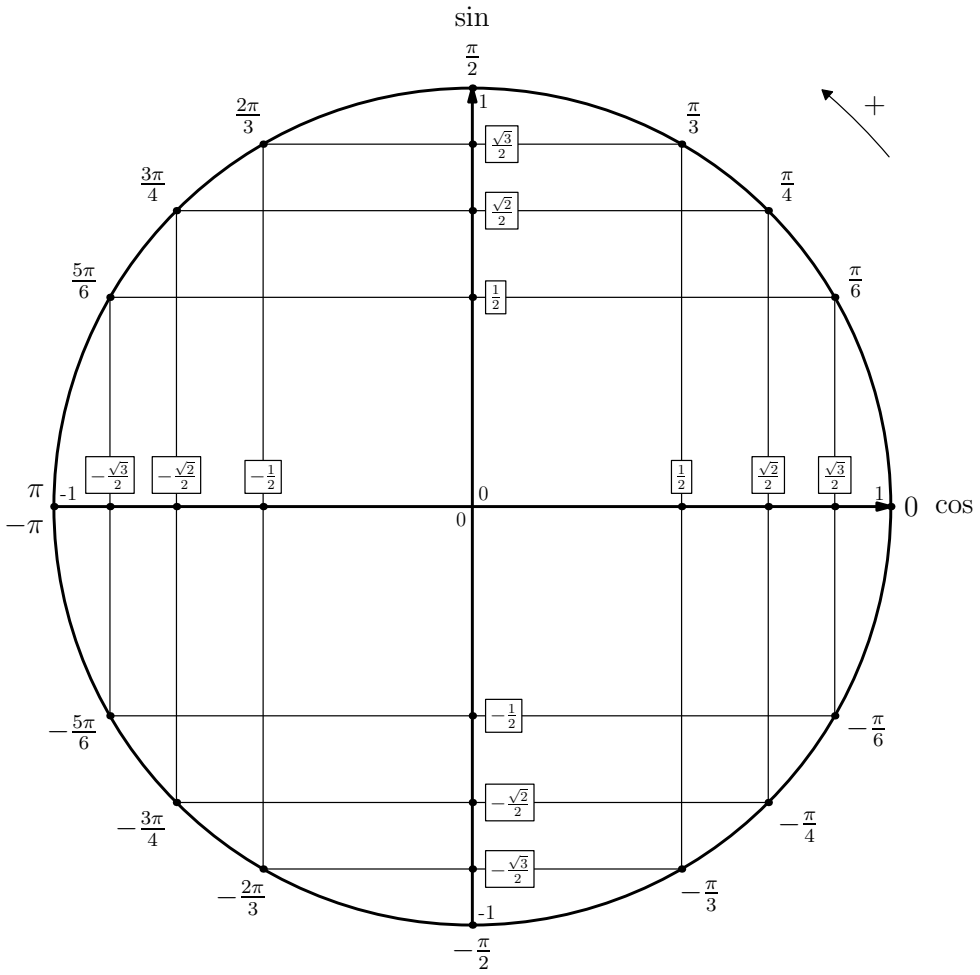
x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	non défini

10.2.3 Supplément : arcs associés

Les formules suivantes sont très utiles. Il faut savoir les retrouver en utilisant le cercle trigonométrique. En terminale, on demande seulement de les retrouver pour les valeurs remarquables du paragraphe précédent.

$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

Figures



Exercice 10.4. Donner la valeur exacte des sinus et cosinus des réels suivants

x	4π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	-3π	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{6}$
$\sin(x)$										
$\cos(x)$										

10.3 Étude des fonctions sinus et cosinus

Elles sont appelées souvent fonctions circulaires. À tout nombre x correspond un seul point M du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x$. L'abscisse de M est le cosinus de x et son ordonnée est le sinus de x.

Fonction cosinus :

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Fonction sinus :

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

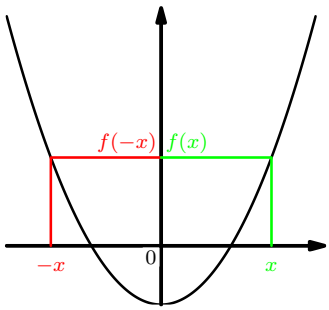
10.3.1 Parité

Rappels

Pour une fonction f dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 :

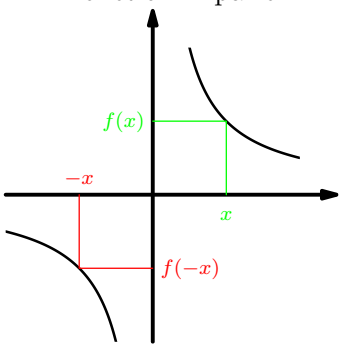
- Quand $f(-x) = f(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}$, f est dite **paire**.
  Sa courbe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Quand $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}$, f est dite **impaire**.
  Sa courbe est alors symétrique par rapport à l'origine.

Fonction paire



$f(-x) = f(x)$

Fonction impaire



$f(-x) = -f(x)$

Exemple 1. La fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x)^2 = x^2.$$

Exemple 2. La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$ car

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}.$$

Exemple 3. La fonction ln n'est ni paire ni impaire car son ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à l'origine.

Remarque : une fonction impaire, définie en 0, est nulle en ce point.
En effet, $f(0) = -f(0)$ implique $f(0) = 0$.

Exercice 10.5. Étudier la parité des fonctions f, g, h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^3 - 5x \qquad g(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+5x^4} \qquad h(x) = x^5 + 7$$

Parité des fonctions trigonométriques

Propriété 26. La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Démonstration. Soit x un nombre, M le point tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x$ et M' le point tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM'}) = -x$.

M et M' sont symétriques par rapport à (OA) : ils ont la même abscisse x donc :

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

M et M' ont des ordonnées opposées :

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

□

10.3.2 Périodicité

Soit x un nombre réel et M le point tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x$.
$x + 2\pi$ est aussi une mesure de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$. Donc :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques. Leur période est 2π.

Remarque : 4π, -20π sont aussi des périodes mais la période est la plus petite période positive.

10.3.3 Dérivées

Proposition 32. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 1. En particulier, en 0, comme $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, la définition du nombre dérivé s'écrit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Remarque 2. La proposition 15 du chapitre 5 permet d'écrire que, pour toute fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$:

la dérivée de $x \mapsto \sin(u(x))$ est $x \mapsto u'(x) \times \cos(u(x))$;
la dérivée de $x \mapsto \cos(u(x))$ est $x \mapsto -u'(x) \times s\sin(u(x))$.

En particulier, la fonction $x \mapsto \sin(ax+b)$ a pour dérivée $x \mapsto a\cos(ax+b)$.

Remarque 3. Les physiciens écrivent

$$\frac{d\sin(\omega t + \phi)}{dt} = \omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d\cos(\omega t + \phi)}{dt} = -\omega\sin(\omega t + \phi)$$

10.3.4 Sens de variation

Il suffit d'étudier ces fonctions sur $[0;\pi]$: la parité (ou l'imparité) permet de déduire par symétrie les variations sur $[-\pi;0]$. Puis la périodicité permet de compléter $\mathbb{R}$.

Étude sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.
On peut démontrer leurs variations par observation du cercle trigonométrique :

— Si

$$0 \leqslant x < x' \leqslant \frac{\pi}{2}$$

alors

$$\cos(x) > \cos(x')$$

Donc la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

— Si

$$0 \leqslant x < x' \leqslant \frac{\pi}{2}$$

alors

$$\sin(x) < \sin(x')$$

Donc la fonction sinus est croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

On étudie de même leurs variations sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$.
D'où les tableaux des variations des deux fonctions

x	0		π
$\cos(x)$	1	↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

10.3.5 Représentations graphiques

Ces courbes portent le nom de sinusoïdes.

On trace la courbe sur $[0;\pi]$. On complète par symétrie par rapport à O ou Oy suivant que la fonction est impaire ou paire.

Ces fonctions étant de période 2π : si $M(x;y)$ appartient à la courbe, $M'(x+2k\pi;y)$ appartient aussi à la courbe. On complète donc les courbes par des translations de vecteur $\vec{t}(2k\pi;0)$.

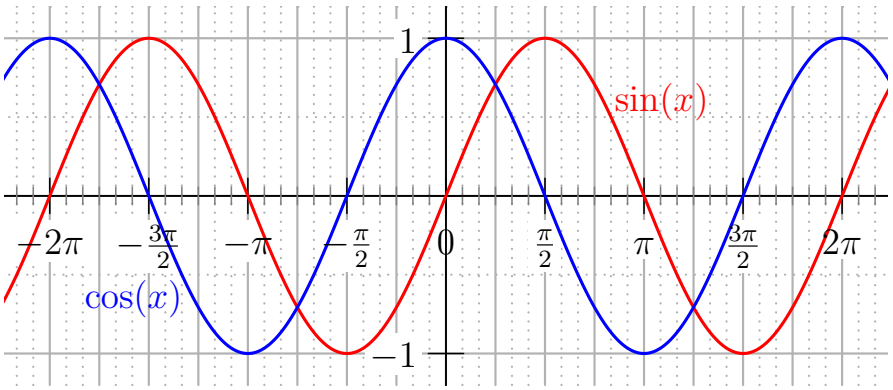


FIGURE 10.1 – Fonctions circulaires

10.4 Équations et inéquations trigonométriques

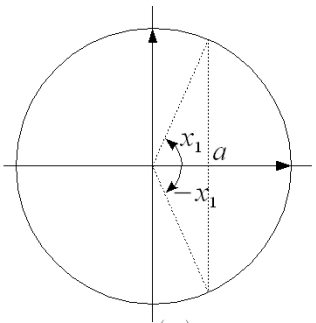
10.4.1 Équation $\cos x = a$

a étant un réel compris entre -1 et +1, l'équation $\cos x = a$ admet deux types de solutions :

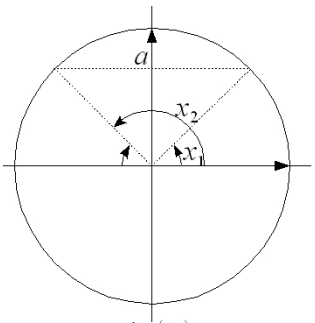
$$\begin{cases} x_1 + 2k\pi \\ -x_1 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La calculette ne donne qu'une seule de ces solutions...

Exemple : l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ admet pour solutions $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.



cos (x)=a



sin (x)=a

10.4.2 Équation $\sin x = a$

a étant un réel compris entre -1 et +1, l'équation $\sin x = a$ admet deux types de solutions :

$$\begin{cases} x_1 + 2k\pi \\ \pi - x_1 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La calculette ne donne qu'une seule de ces solutions...

Exemple : l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ admet pour solutions : $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

10.4.3 Inéquations de la forme $\cos x \leqslant a$ sur $[-\pi; \pi]$

Exemple 1 : $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solution sur $[-\pi; \pi]$:

Exemple 2 : $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution sur $[-\pi; \pi]$:

Exercice 10.6. 60 page 278 du livre

Exercice 10.7. 67 page 279 du livre

Exercice 10.8. 68 page 279 du livre

Exercice 10.9. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2\sin(2x)$ est impaire et que sa période est π.

Exercice 10.10. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)$ est périodique de période $\dfrac{4\pi}{3}$.

Exercice 10.11. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, sur $\mathbb{R}$ quand ce n'est pas précisé.

$f(x) = \sin(x)(1 + \cos(x))$
$g(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$
$h(x) = \cos(\pi - x)$
$i(x) = \sin(2x)\cos(9x)$
$j(x) = \sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
$k(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$
$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Exercice 10.12. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$:

(a) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (g) $\sin(x) \leqslant \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

(b) $\cos(x) = 0$ (e) $\sin(x) = 0$ (h) $\cos(x) > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\cos(x) = -1$ (f) $\sin(x) = 1$ (i) $\cos(x) > \cos(0)$

Exercice 10.13. Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction sinus.

Qu'affiche le programme suivant ?

```
from math import sin , pi

def radtodeg(a):
    return 180*a/pi

x = 0

while abs(sin(x) - x) < 0.01:
        x = x + 10**(-5)

print(radtodeg(x))
```

Exercice 10.14. On considère les fonctions f et g définies sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sin x\sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Leurs courbes représentatives semblent avoir la même tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Est-ce vrai ?

Exercice 10.15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{5}\sin(5x)$$

1. La fonction f est-elle paire ou impaire ?
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère.
4. Sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{2\pi}{5}\right]$, étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite d d'équation $y = x$.
5. Sur cet intervalle, existe-t-il des points où la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d ? Si oui, placer ces points sur le graphique.

Exercice 10.16. L'abscisse de la position d'un objet mobile sur un axe orienté d'origine O est donnée par la fonction x définie sur $[0; 60]$ par :

$$x(t) = 5\cos\frac{\pi t}{10}$$

où t, le temps, est exprimé en secondes et $x(t)$ est exprimé en mètres.

1. Combien de fois le mobile se trouve-t-il en O ?
2. Étudier les variations de la fonction x.
3. Tracer sa courbe représentative dans un repère.
4. La vitesse de ce mobile est donnée par x', fonction dérivée de x. À quels instants la vitesse du mobile est-elle maximale ? minimale ?

Exercice 10.17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$$

où a, ω et φ sont des nombres réels strictement positifs.

1. Montrer que f est une fonction de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.
2. Dans cette question, $\omega = \dfrac{2\pi}{50}$, $\varphi = 0$ et $a = 220$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Quelle est sa période ? sa fréquence (l'inverse de la période) ?
   (c) Calculer sa valeur moyenne sur une période.

Exercice 10.18. 103 page 282 du livre

Exercice 10.19. 102 page 282 du livre (on admet que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$)

Exercice 10.20. 89 page 281 du livre

Exercice 10.21. 90 page 281 du livre (corrigé)

Exercice 10.22. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x$.

Exercices supplémentaires

Exercice 10.23 (Fonction tangente)**.** 104 page 283 du livre

Exercice 10.24. 44 (ressorts)

Exercice 10.25. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\cos^2 x - 5\cos x - 1 = 0$$

(aide : on pourra poser $X = \cos x$)

Exercice 10.26. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$$

1. (a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   (b) En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 2\pi]$,

$$f'(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$$

2. Résoudre dans l'intervalle , l'équation produit

$$\sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0$$

3. (a) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
   (b) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$. Préciser les ordonnées des points de la courbe représentative de f dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.
   (c) Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.