NOM :
Prénom :

Terminale

1 heure

21 mai 2025

Contrôle de mathématiques 9

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle

$$y' + 5y = 2$$

Exercice 2

1. Résoudre sur $]0 ; +\infty[$ l'équation différentielle : $y' = \frac{1}{2x}$
2. Donner la solution y qui vérifie $y(1) = 6$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$y' = 2y + e^{2x} \quad (E)$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 2y \quad (E_0)$$

3. Dédire des questions précédentes toutes les solutions de (E) .

Exercice 4

1. Calculer, en détaillant les calculs : $\binom{24}{2}$ et A_{24}^2 .
2. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \binom{n+1}{n} \quad ; \quad B = \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}$$

Exercice 5

Le Kinball est un sport dans lequel plusieurs équipes se passent un gros ballon. Le but du jeu est d'obliger une équipe adverse à laisser tomber le ballon au sol. Dans ce sport, tous les joueurs d'une équipe ont le même rôle.

Alice entraîne un club de Kinball qui compte 42 adhérents. Avant un championnat, elle doit choisir 10 personnes qui y participeront.

1. Combien de choix possibles s'offrent à Alice pour cette sélection de 10 joueurs ?
2. Parmi les 32 adhérents non sélectionnés, 15 sont placés sur une liste d'attente. De combien de manières peut-on constituer cette liste ?
3. Parmi les 42 adhérents, il y a 22 filles et 20 garçons. Combien Alice a-t-elle de choix possibles pour une équipe (de 10) :
 - (a) qui ne comporte que des filles ?
 - (b) qui comporte un seul garçon ?
 - (c) qui comporte autant de garçons que de filles ?

Corrigé du contrôle de mathématiques 9

Exercice 1

L'équation différentielle $y' + 5y = 2$ admet pour solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ les fonctions $y : x \mapsto \boxed{y(x) = Ce^{-5x} + \frac{2}{5}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Sur $]0 ; +\infty[$ l'équation différentielle : $y' = \frac{1}{2x}$ admet pour solutions les fonctions

$$y : x \mapsto \boxed{y(x) = \frac{1}{2} \ln(x) + C}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

2. On veut $y(1) = 6$:

$$\frac{1}{2} \ln(1) + C = 6$$

$$\boxed{C = 6}$$

Exercice 3

$$y' = 2y + e^{2x} \quad (E)$$

1. La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un produit de deux fonctions qui le sont) et

$$u'(x) = 1e^{2x} + 2xe^{2x}$$

u est une solution de (E) car, pour tout réel x :

$$u'(x) = 2u(x) + e^{2x}$$

2. L'équation différentielle $y' = 2y$ admet pour solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ les fonctions $y : x \mapsto y(x) = Ce^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $y : x \mapsto \boxed{y(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

$$1. \binom{24}{2} = \frac{24!}{2!22!} = \frac{24 \times 23}{2} = \boxed{276}$$

$$A_{24}^2 = 24 \times 23 = \boxed{552}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A &= \binom{n+1}{n} \\ &= \frac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!} \\ &= \frac{(n+1) \times n!}{n!} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = n + 1}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{(n+2)!} - \frac{n+2}{(n+2)(n+1)!} + \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1) \times n!} \\
&= \frac{1 - (n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

$$B = \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$$

Exercice 5

1. Le nombre de façons de choisir 10 personnes parmi 42 est

$$\binom{42}{10} = \boxed{1\,471\,442\,973}$$

2. Le nombre de façons de choisir 15 personnes parmi 32 en tenant compte de l'ordre est

$$A_{32}^{15} \simeq 7,4 \times 10^{20}$$

3. (a) Le nombre de choix possibles pour former une équipe de 10 filles (choisies parmi 22) est :

$$\binom{22}{10} = \boxed{646\,646}$$

- (b) Le nombre de choix possibles pour former une équipe de 9 filles (choisies parmi 22) et d'un garçon (choisi parmi 20) est :

$$\underbrace{20}_{\text{choix du garçon}} \times \underbrace{\binom{22}{9}}_{\text{choix des 9 filles}} = \boxed{9\,948\,400}$$

- (c) Le nombre de choix possibles pour former une équipe de 5 filles (choisies parmi 22) et de 5 garçons (choisis parmi 20) est :

$$\underbrace{\binom{20}{5}}_{\text{choix des 5 garçons}} \times \underbrace{\binom{22}{5}}_{\text{choix des 5 filles}} = \boxed{408\,282\,336}$$