NOM : Terminale 2 heures 28 mars 2025
Prénom :

Contrôle de mathématiques 7

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points

$$A(-1\ ;\ -1\ ;\ 0), B(6\ ;\ -5\ ;\ 1), C(1\ ;\ 2\ ;\ -2) \text{ et } S(13\ ;\ 37\ ;\ 54).$$

1. (a) Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   (b) Prouver que le vecteur $\vec{n}(5\ ;\ 16\ ;\ 29)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. (a) Prouver que le triangle ABC est rectangle.
   (b) Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}$.
3. (a) Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
   (b) La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
   Donner une équation paramétrique de (Δ). En déduire les coordonnées du point H .
4. Déterminer le volume du tétraèdre $SABC$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $\dfrac{\textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}}{3}$.

Exercice 2

1. Déterminer toutes les primitives des fonctions données sur I.
   (a) $f(x) = 3x + 4 + x^3 - \dfrac{1}{x^2}$, $\quad I =]0; +\infty[$.
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $\quad I = \mathbb{R}$
   (c) $f(x) = (4x-5)^3$, $\quad I = \mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive s'annulant en 1 de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 3

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

Affirmation 1 : $\displaystyle\int_{0,5}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ est strictement négative.

Affirmation 2 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Sa primitive F telle que $F(1) = 0$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 3 : La valeur moyenne sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$ est $\dfrac{e}{2} - 1$.

Affirmation 4 : Une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2)$ est la fonction F définie par $F(x) = (\ln(x))^2$.

Affirmation 5 : f est une fonction dérivable et dont la dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_2^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x)$.

Affirmation 6 : Pour tout réel $x \geqslant 2$, $\ln(x) \geqslant \ln(2)$, donc $\displaystyle\int_2^5 \ln(x)\mathrm{d}x \geqslant \ln(8)$.

Affirmation 7 : f est une fonction définie, continue et positive sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction g définie sur $I = [2;+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante sur I.

Affirmation 8 : $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 1$

Exercice 4

En utilisant une intégration par parties, calculer

$$\int_1^e x\ln(2x)\mathrm{d}x$$

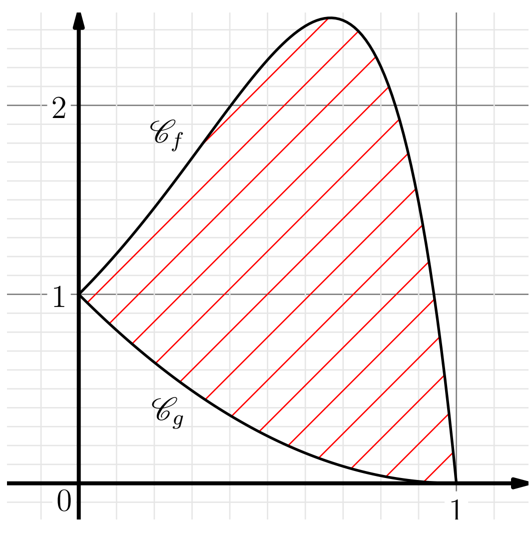
Exercice 5

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.

Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies, pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$, par :

$$f(x) = (1-x)e^{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Leurs courbes représentatives sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



On admet que, pour tout x de $[0;1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 1)$ sont des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Prouver que la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x) = \dfrac{4-3x}{9} \times e^{3x}$ est une primitive de f.
3. Déterminer l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
4. Calculer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire S de la partie hachurée. Donner ensuite le résultat arrondi au dixième.

Terminale 28 mars 2025

Corrigé du contrôle de mathématiques 7

Exercice 1

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles :

$$\times\tfrac{2}{7}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & -4 & 1\\\hline 2 & 3 & -2\\\hline\end{array}\ \times(-2)$$

Donc les points A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan.

(b) Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 5\times 7 + 16\times(-4) + 29\times 1 = 35 - 64 + 29 = 0$ donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 5\times 2 + 16\times 3 + 29\times(-2) = 10 + 48 - 58 = 0$ donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(c) On en déduit que (ABC) a pour équation cartésienne :

$$5x + 16y + 29z + d = 0$$

où d est un réel.

Comme $A \in (ABC)$:

$$5(-1) + 16(-1) + 29\times 0 + d = 0$$

d'où

$$d = 21$$

Le plan (ABC) a pour équation $\boxed{5x + 16y + 29z + 21 = 0}$.

2. (a) Montrons que ABC est rectangle.

$AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 7^2 + (-4)^2 + 1^2 = 49 + 16 + 1 = 66$

$AC^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 2^2 + 3^2 + (-2)^2 = 4 + 9 + 4 = 17$

$BC^2 = (1-6)^2 + (2+5)^2 + (-2-1)^2 = 25 + 49 + 9 = 83$

$66 + 17 = 83$. On a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Autre méthode : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7\times 2 + (-4)\times 3 + 1\times(-) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

(b) ABC est rectangle en A donc son aire vaut $\dfrac{AB\times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{66}\times\sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}$.

3. (a) Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.

$$5x_S+16y_S+29z_S+21=5\times 13+16\times 37+29\times 54+21=2\,244\neq 0$$

donc $S\notin$ (ABC).

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

(b) La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.

Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\boxed{\begin{cases} x &= 13+5t \\ y &= 37+16t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z &= 54+29t \end{cases}}$$

La paramètre t du point H est solution de

$$5(13+5t)+16(37+16t)+29(54+29t)+21=0$$

$$65+25t+592+256t+1\,566+841t+21=0$$

$$2\,244+1\,122t=0$$

$$t=-2$$

Donc le point H a pour coordonnées : $\begin{cases} x_{\mathrm{H}} &= 13+5(-2) &= 3 \\ y_{\mathrm{H}} &= 37+16(-2) &= 5 \\ z_{\mathrm{H}} &= 54+29(-2) &= -4 \end{cases}$

$$\boxed{H(3\ ;\ 5\ ;\ -4)}$$

4. Le volume de $SABC$ est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{ABC} &= \frac{\text{aire}(ABC)\times SH}{3} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1\,122}}{2}\times\sqrt{(10)^2+(32)^2+(58)^2}}{3} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1\,122}}{2}\times\sqrt{4\,488}}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{ABC}=374\text{ u.v.}}$$

Exercice 2

1. (a) $f(x)=3x+4+x^3-\dfrac{1}{x^2}$, $\qquad I=]0;+\infty[$.

Les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par

$$\boxed{F(x)=\frac{3x^2}{2}+4x+\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}+k}$$

où $k\in\mathbb{R}$.

(b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $\qquad I=\mathbb{R}$

Les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+k}$$

où $k\in\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = (4x-5)^3, \qquad I = \mathbb{R}$.

Les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{16}(4x-5)^4 + k}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

2. Les primitives de f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions F définies sur I par

$$F(x) = 2\sqrt{x} + k$$

$F(1) = 0$ donne $2\sqrt{1} + k = 0$, soit $k = -2$.

La primitive cherchée est définie par $\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} - 2}$.

Exercice 3

Affirmation 1 : Faux.

$\displaystyle\int_{0,5}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ est positive car c'est l'intégrale d'une fonction strictement positive sur $[0{,}5\ ;\ 1]$ (et les bornes sont dans le bon sens ... : $1 > 0{,}5$).

Affirmation 2 : Vrai.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. f est la dérivée de sa primitive F e f est positive. Donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Faux.

La valeur moyenne sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$ est

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^{1^2} - \frac{1}{2}e^{0^2} \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Affirmation 4 : Faux.

Une primitive de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2)$ n'est pas la fonction F définie par $F(x) = (\ln(x))^2$.

La dérivée de F est définie par

$$F'(x) = 2\ln(x) \times \frac{1}{x}$$

Ce n'est pas égal pour tout $x > 0$ à $f(x) = \ln(x^2)$. Par exemple, $F'(3) = \dfrac{2\ln(3)}{3} = \dfrac{\ln(9)}{3} \neq f(3) = \ln(9)$.

Affirmation 5 : Faux.

D'après le théorème fondamental sur les intégrales, $\displaystyle\int_2^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(2)$. Quand $f(2) \neq 0$, c'est différent de $f(x)$.

Affirmation 6 : Vrai.

Pour tout réel $x \geqslant 2$, $\ln(x) \geqslant \ln(2)$ car ln croît sur $]0\ ;\ +\infty[$. Comme l'intégrale conserve l'ordre,

$$\int_2^5 \ln(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_2^5 \ln(2)\mathrm{d}x$$

$$\int_2^5 \ln(x)\mathrm{d}x \geqslant [x\ln(2)]_2^5$$

$$\int_2^5 \ln(x)\mathrm{d}x \geqslant 5\ln(2) - 2\ln(2) = 3\ln(2) = \ln\left(2^3\right) = \ln(8)$$

Affirmation 7 : Vrai.

Notons F une primitive de f sur I. Alors, pour tout x de I, $g(x) = F(x) - F(2)$ et $g'(x) = F'(x) = f(x)$.

Comme $f = g'$ est positive sur I, alors g est croissante sur I.

Affirmation 8 : Vrai.

$$\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Exercice 4

$$\int_1^e \underbrace{x}_{u'(x)}\underbrace{\ln(2x)}_{v(x)}\mathrm{d}x = \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u(x)}\underbrace{\ln(2x)}_{v(x)}\right]_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u(x)}\underbrace{\frac{2}{2x}}_{v'(x)}\mathrm{d}x$$

u, v, u', v' sont continues sur $[1;e]$ donc on peut intégrer par parties.

$$\int_1^e x\ln(2x)\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2}\ln(2e) - \frac{1^2}{2}\ln(2) - \int_1^e \frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$\int_1^e x\ln(2x)\mathrm{d}x = \frac{e^2\ln(2e)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$\int_1^e x\ln(2x)\mathrm{d}x = \frac{e^2\ln(2e)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Exercice 5

1. $f(1) = (1-1)e^3 = 0$ et $g(1) = (1-1)^2 = 0$ donc le point $A(1\ ;\ 0)$ est commun aux deux courbes.
   $f(0) = (1-0)e^0 = 1$ et $g(0) = (0-1)^2 = 1$ donc le point $B(0\ ;\ 1)$ est commun aux deux courbes.
2. La fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x) = \dfrac{4-3x}{9} \times e^{3x} = \left(\dfrac{4}{9} - \dfrac{x}{3}\right)e^{3x}$ est dérivable sur $[0;1]$ (c'est un produit de fonctions qui le sont) et

$$F'(x) = \left(0 - \frac{1}{3}\right)e^{3x} + \left(\frac{4}{9} - \frac{x}{3}\right)3e^{3x}$$

$$F'(x) = \left(0 - \frac{1}{3}\right)e^{3x} + \left(\frac{4}{3} - x\right)e^{3x}$$

$$F'(x) = e^{3x}\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - x\right)$$

$$F'(x) = e^{3x}(1-x) = f(x)$$

Donc F est une primitive de f.

3. L'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_g &= \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1 \\
&= \frac{1^3}{3}-1^2+1-\left(\frac{0^3}{3}-0^2+0\right) \\
\mathscr{A}_g &= \boxed{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

4. L'aire S de la partie hachurée vaut

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \mathscr{A}_g \\
&= F(1)-F(0)-\frac{1}{3} \\
&= \frac{4-3}{9}e^3-\frac{4-0}{9}e^0-\frac{1}{3} \\
&= \boxed{\frac{e^3-7}{9}}
\end{aligned}$$

Une valeur arrondie au dixième est 1,5.