NOM : Terminale 2 heures 28 février 2025
Prénom :

Contrôle de mathématiques 6

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :
$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$
La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.
Affirmation 1 : La suite (u_n) converge.

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$
Affirmation 2 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^n - n$.
Affirmation 3 : La suite (u_n) converge.

Exercice 2

Au début de l'année 2025, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0{,}008u_n\,(200 - u_n) \end{array}\right.$$
où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2025 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2026.

   On considère dans la suite de l'exercice la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0{,}008x(200 - x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.
3. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.
   (b) En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.
2. On souhaite écrire une fonction en langage python qui retourne les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

   La fonction suivante est proposée :

```
def f(n):
    d = 300
    a = 450
    for i in range(n):
        d = d/2 +  100
        a = d/2 + a/2 +70
    return a,d
```

   (a) Que retourne $f(1)$?

   Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?

   (b) Expliquer comment corriger cette fonction pour qu'elle renvoie les résultats souhaités.

3. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.

   Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

   (b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

   (c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

   (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

   $2^n \geqslant n^2$.

   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

   $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

   (d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

Corrigé du contrôle de mathématiques 6

Exercice 1

1. VRAI.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$$
   Donc, en divisant par $n > 0$:
   $$3 - \frac{4}{n} \leqslant \underbrace{\frac{S_n}{n}}_{u_n} \leqslant 3 + \frac{4}{n}$$
   $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \pm \frac{4}{n} = 3 \pm 0 = 3$
   D'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente vers 3.
2. VRAI.
   Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$.
   - Initialisation : $v_1 = 2$ et $\frac{1+1}{1} = 2$. Donc la propriété est vraie au rang 1.
   - Hérédité : supposons que pour un entier $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$. Montrons que $v_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$
     $$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2 - \frac{1}{v_n} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= 2 - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1) - n}{n+1} \\ &= \frac{2n + 2 - n}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$
     L'hérédité est démontrée.
   - Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$.
3. FAUX
   $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n - n = +\infty$ par croissances comparées.

Exercice 2

1. Au début de 2026, le nombre d'oiseaux vaut

$$u_1 = 0{,}008u_0(200 - u_0) = 0{,}008 \times 40 \times 160 = 51{,}2$$

soit environ 51 oiseaux.

2. Résolvons $f(x) = x$ dans $[0; 100]$.
Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 0{,}008x(200 - x) &= x \\ 1{,}6x - 0{,}008x^2 &= x \\ -0{,}008x^2 + 0{,}6x &= 0 \\ x(-0{,}008x + 0{,}6) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad -0{,}008x + 0{,}6 &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0{,}6}{0{,}008} &= 75 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions dans $[0~;~100]$: $\boxed{0 \text{ et } 75}$.

3. (a) Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0{,}008x^2 + 1{,}6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2 du type $ax^2 + bx + c$. Comme $a = -0{,}008 < 0$, f est strictement croissante avant $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1{,}6}{0{,}016} = 100$ et strictement décroissante après.
f est donc croissante sur $[0~;~100]$.

x	0	100
f	0 $\nearrow$	80

(b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.

- Initialisation : $u_0 = 40$ et $u_1 = 51{,}2$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$.
- Hérédité : supposons que pour un entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.
Alors, comme f croît sur $[0; 100]$,

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100)$$

c'est-à-dire :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100}$.

(c) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 100. Donc elle converge vers une limite ℓ.

(d) Comme f est continue sur $[0~;~100]$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Cette équation a deux solutions dans $[0~;~100]$, 0 et 75. Mais (u_n) est minorée par 40, donc la solution 0 est rejetée : $\boxed{\ell = 75}$.
D'ici 2125, le modèle prévoit que la population d'oiseaux va croître et tendre vers 75 individus.

Exercice 3

1. $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100\,;\ \boxed{d_1 = 250}$

   $a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70\,;\ \boxed{a_1 = 445}$

2. (a) $f(1)$ retourne $d = \frac{300}{2} + 100 = 250$ et $a = \frac{250}{2} + \frac{450}{2} + 70 = 420$. Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question 1.

   Détail (évolution des variables)

i	a	d
		300
	450	
0		
		250
	420	

   (b) Lors du calcul de a dans la boucle, il faut utiliser l'ancienne valeur de d (pas celle qui vient juste d'être calculée).
   Il faut donc conserver l'ancienne valeur de d dans une autre variable e.

```
def f(n):
    d = 300
    a = 450
    for i in range(n):
        e = d
        d = d/2 +  100
        a = e/2 + a/2 +70
    return a,d
```

   Plus simple : on change l'ordre des calculs de a et d :

```
def f(n):
    d = 300
    a = 450
    for i in range(n):
        a = d/2 + a/2 +70
        d = d/2 +  100
    return a,d
```

3. (a) Pour tout n :

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= d_{n+1} - 200 \\
&= \frac{1}{2}d_n + 100 - 200 \\
&= \frac{1}{2}(e_n + 200) + 100 - 200 \\
e_{n+1} &= \frac{1}{2}e_n
\end{aligned}
$$

   Donc (e_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(b) Donc, pour tout n, D'après la question précédente,

$$e_n = e_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $d_n = e_n + 200$,

$$\boxed{d_n = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200}$$

(c) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200}$.

La suite (d_n) converge donc vers 200.

4. (a) Pour tout n,

$$2n^2 - (n+1)^2 = 1n^2 - 2n - 1$$

Ce polynôme de degré 2 est du signe de 1 sauf entre ses racines $n_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \simeq -0{,}4$ et $n_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \simeq 2{,}4$

Donc, pour $n \geqslant 3$, il est positif, c'est-à-dire :

$$\boxed{2n^2 \geqslant (n+1)^2 \qquad \text{pour } n \geqslant 3}$$

(b) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$

- Initialisation : pour $n = 4$, on a bien $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$
- Hérédité : supposons que pour un entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

  En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 :

  $$2^{n+1} \geqslant 2n^2$$

  D'après le (a), $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, donc

  $$2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$$

  L'hérédité est démontrée.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2}$

(c) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 4$, on a

$$2^n \geqslant n^2$$

Comme la fonction inverse décroît sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

En multipliant par $100n$ (qui est strictement positif) :

$$100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour } n \geqslant 4,\ 0 \geqslant 100n \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2}}$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$. D'après la question précédente et le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'autre part, comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 = 110 \times 0 + 340 = 340$.

Par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 340}$