Corrigé du bac blanc

Exercice 1

1. Réponse c.

   Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$.

   Pour $x \neq 0$,

   $$f(x) = \frac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{-2+0-0}{1+0} = -2$

   Donc la droite horizontale d'équation $y = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f.

2. Réponse d.

   f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soit F une primitive de f.

   La dérivée de la réponse d s'écrit, pour tout x,

   $$F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2} + 0 = xe^{x^2} = f(x)$$

   (on a utilisé : $(e^u)' = u'e^u$)

   La fonction de la réponse d vérifie bien aussi $F(0) = \dfrac{1}{2}e^{0^2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

3. Réponse c.

   Sur le graphique, on observe que f' est croissante $[0\ ;\ 2]$.

   La fonction f est donc convexe sur $[0\ ;\ 2]$.

4. Réponse a.

   Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives.

   Sur $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (c'est une somme de termes strictement positifs : $\forall X \in \mathbb{R}, e^X > 0$).

   Les primitives de la fonction f ont pour dérivée f, qui est positive sur $\mathbb{R}$. Donc les fonctions F sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

5. Réponse c.

   Ci-dessous, u, v, u', v' sont continues donc on peut intégrer par parties.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{v(x)} \underbrace{\sin(x)}_{u'(x)} \mathrm{d}x = \left[\underbrace{x}_{v(x)} \underbrace{(-\cos(x))}_{u(x)} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{v'(x)} \underbrace{(-\cos(x))}_{u(x)} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x$$

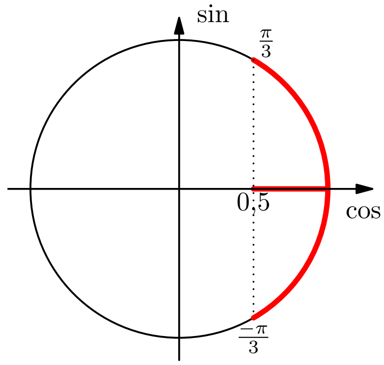
$$= 0 + \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + [\sin(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6 + \pi\sqrt{3}}{12}$$

6. Réponse a.



Sur $[-\pi \ ; \ \pi]$, l'inéquation $\cos(x) \geqslant 0{,}5$ admet pour solution $\left[-\frac{\pi}{3} \ ; \ \frac{\pi}{3}\right]$

Exercice 2

$$A(1\ ;\ 0\ ;\ -1), \quad B(3\ ;\ -1\ ;\ 2), \quad C(2\ ;\ -2\ ;\ -1), \quad D(4\ ;\ -1\ ;\ -2).$$

$$\Delta : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles :

$\times 0{,}5$	2	-1	3	$\times 0$
	1	-2	0	

Donc A, B et C ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan $\mathcal{P}$.

(b) On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times 3 = 0$
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times 0 = 0$

$\overrightarrow{CD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$: c'est donc un vecteur normal à ce plan. Donc (CD) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

On en déduit que C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$.

(c) $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, donc une équation de $\mathcal{P}$ est

$$2x + 1y - 1z + d = 0$$

avec $d \in \mathbb{R}$.
Comme $C(2\ ;\ -2\ ;\ -1) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} 2x_C + 1y_C - 1z_C + d &= 0 \\ 2 \times 2 + 1 \times (-2) - (-1) + d &= 0 \\ d &= -3 \end{aligned}$$

Une équation de $\mathcal{P}$ est ainsi

$$2x + y - z - 3 = 0$$

2. (a) La distance CD vaut

$$\begin{aligned} &CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} \\ &CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \\ &\boxed{CD = \sqrt{6}} \end{aligned}$$

(b) Comme C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$, CD est la plus courte distance entre D et un point du plan : pour tout autre point M de $\mathcal{P}$, $MD > \sqrt{6}$.

3. (a) Déterminons deux points de Δ. Avec $t = 0$ (dans la représentation paramétrique de Δ), on obtient le point $E(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$. Et avec $t = 1$, $F(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Ces deux points sont dans $\mathcal{P}$ car leurs coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} &2x_E + y_E - z_E - 3 = 2 \times 0 + 2 - (-1) - 3 = 0 \\ &2x_F + y_F - z_F - 3 = 2 \times 0 + 3 - 0 - 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc toute la droite (EF), c'est-à-dire Δ est contenue dans le plan.

Autre méthode : pour tout réel t,

$$2 \times 0 + (2 + t) - (-1 + t) - 3 = 0$$

donc tous les points de Δ sont dans le plan $\mathcal{P}$.

(b) H est le projeté orthogonal de D sur Δ donc :

- $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} x_H - 4 \\ y_H + 1 \\ z_H + 2 \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v_\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ directeur de Δ :

$$\overrightarrow{DH}.\vec{v_\Delta} = 0$$

$$0(x_H - 4) + 1(y_H + 1) + 1(z_H + 2) = 0$$

$$y_H + z_H + 3 = 0$$

Comme H appartient à Δ, il existe un réel t tel que $x_H = 0$, $y_H = 2 + t$ et $z_H = -1 + t$. Déterminons t en remplaçant dans l'égalité précédente :

$$2 + t + (-1 + t) + 3 = 0$$

$$2t + 4 = 0$$

$$t = -2$$

Ainsi $H(0\ ;\ 0\ ;\ -3)$.

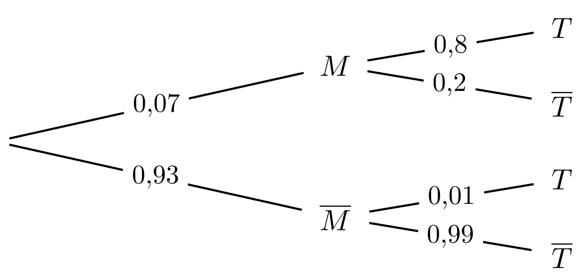
Autre méthode : le point T de paramètre $t = -2$ a pour coordonnées $T(0\ ;\ 0\ ;\ -3)$. Comme $\overrightarrow{TD}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}.\vec{v_\Delta}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0 - 1 + 1 = 0$, T est le projeté orthogonal de D sur Δ. C'est H.

(c) La distance du point D à la droite Δ vaut

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \\ &= \sqrt{(0-4)^2 + (0+1)^2 + (-3+2)^2} \\ &= \sqrt{18} \\ &= \sqrt{9 \times 2} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= \boxed{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Arbre pondéré :



$$\begin{aligned} P(M \cap T) &= P(M) \times P_M(T) \\ &= 0{,}07 \times 0{,}8 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M \cap T) = 0{,}056}$$

2. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après les probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) \\ &= 0{,}056 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}01 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T) = 0{,}065\,3}$$

3. $P_M(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif sachant qu'on est malade, et $P_T(M)$ est la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

   Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

4. Sachant que la personne choisie au hasard a eu un test positif, la probabilité qu'elle soit malade est :
$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}056}{0{,}0653} \approx \boxed{0{,}86}$$

5. (a) On répète 10 fois, de manière indépendante (car on considère qu'il y a remise), l'expérience de Bernoulli à deux issues : le test est positif ou pas. Le nombre X de tests positifs suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}065\,3$.

   (b) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}0653^2 \times (1 - 0{,}0653)^8 \approx \boxed{0{,}11}$

6. Soit n le nombre de personnes testées. On cherche n pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.
   Comme $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$, on doit résoudre :
$$1 - 0{,}9347^n \geqslant 0{,}99$$
   qui équivaut successivement à :
$$0{,}9347^n \leqslant 0{,}01$$
   Comme ln est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$:
$$n \ln(0{,}9347) \leqslant \ln(0{,}01)$$
   En divisant par $\ln(0{,}9347) < 0$:
$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}01}{\ln(0{,}9347)} \approx 68{,}2$$
   Il faut donc tester 69 personnes.

   Autre méthode (moins bien) : par tâtonnement :
   avec $n = 68$, $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}989 < 0{,}99$
   avec $n = 69$, $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}9905 > 0{,}99$

Exercice 4

Partie A

Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$.

1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$ équivaut successivement à
$$x - \ln\left(x^2 + 1\right) = x$$
$$\ln\left(x^2 + 1\right) = 0$$
$$x^2 + 1 = 1$$
$$x^2 = 0$$
   La solution est $\boxed{x = 0}$.

2. • Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car la composée de la fonction polynôme $x \mapsto x^2+1$ à valeurs strictement positives et de ln sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0\ ;\ +\infty[$).
   Pour tout x :
$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$
   La fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (sauf pour $x = 1$ où $f'(1) = 0$) : on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   • Montrons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$.
   Par somme, on a alors
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
3. De
$$0 \leqslant x \leqslant 1$$
   on déduit, comme f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$:
$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$
   On a $f(0) = 0-\ln(0^2+1) = 0$ et $f(1) = 1-\ln(1^2+1) = 1-\ln 2$. Puisque $1-\ln 2 < 1$, alors
$$\forall x \in [0{,}1] \qquad 0 \leqslant f(x) < 1$$
   On a prouvé :
$$\forall x \in [0{,}1] \qquad f(x) \in [0{,}1]$$
4. (a) La fonction g retourne une liste des valeurs de f(n), pour n allant de 0 à la première valeur supérieure au paramètre d'entrée (a).
   (b) g(2) renvoie
$$[f(0), f(1), \dots f(6)]$$
   car $f(5) \approx 1{,}74 < 2$ et $f(6) \approx 2{,}39 > 2$.
   La liste renvoyée est environ
$$[0.0, 0.30685, 0.39056, 0.69741, 1.16678, 1.74190, 2.38908]$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
   • Initialisation : $u_0 = 1 \in [0\ ;\ 1]$, donc c'est vrai pour $n = 0$.
   • Hérédité : supposons que pour un certain entier n, $u_n \in [0\ ;\ 1]$. Alors, d'après A.3., $f(u_n) \in [0\ ;\ 1]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0\ ;\ 1]$. L'hérédité est démontrée.
   • Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [0\ ;\ 1]$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$$
   Étudions le signe de $-\ln\left(u_n^2+1\right)$:
   Pour tout n, $u_n^2 \geqslant 0$, donc $u_n^2+1 \geqslant 1$. Donc $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, donc la suite (u_n) est décroissante .
3. (u_n)est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc.
4. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), la limite ℓ de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$.
   D'après A.1.,$\boxed{\ell = 0}$.