BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Épreuve blanche

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2025

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque choix doit être justifié.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les questions sont indépendantes.

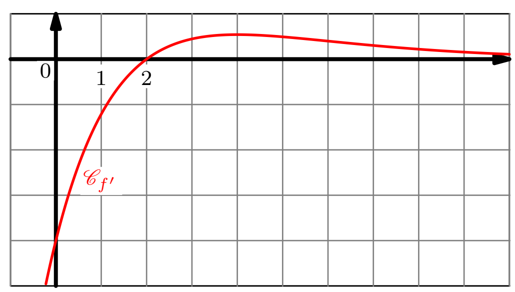
1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

   a. $x = -2$ **b.** $y = -1$
   c. $y = -2$ **d.** $y = 0$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
   La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

   a. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ **b.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$
   c. $F(x) = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$ **d.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

3. On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de **la fonction dérivée f'** d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
   On peut affirmer que la fonction f est :
   a. concave sur $]0\ ;\ +\infty[$
   b. convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$
   c. convexe sur $[0\,;\,2]$
   d. convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$



4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2} + 2$:
   a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$;
   b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;
   c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$;
   d. toutes sont croissantes sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissantes sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5. L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x$ calculable à l'aide d'une intégration par parties, vaut :

   a. 1 **b.** $\dfrac{\pi^2\sqrt{3}}{144}$ **c.** $\dfrac{6+\pi\sqrt{3}}{12}$ **d.** $\dfrac{8581}{9000}$

6. Sur $[-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation $\cos(x) \geqslant 0{,}5$ admet pour solution :

   a. $\left[-\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$;   **b.** $\left[-\pi\ ;\ \dfrac{-\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$
   c. une seule solution ;   **d.** l'ensemble vide (aucune solution).

Exercice 2 — 4,5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points

$$A(1\ ;\ 0\ ;\ -1),\quad B(3\ ;\ -1\ ;\ 2),\quad C(2\ ;\ -2\ ;\ -1)\quad \text{et}\quad D(4\ ;\ -1\ ;\ -2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 0 \\ y & = & 2+t \\ z & = & -1+t \end{array}\right.,\ \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
   Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point C par rapport à D ?
   (c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$.
2. (a) Calculer la distance CD.
   (b) Existe-t-il un point M du plan $\mathcal{P}$ différent de C vérifiant $MD = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.
3. (a) Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
   (b) Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t = -2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
   (c) En déduire la distance du point D à la droite Δ.

Exercice 3 — 4,5 points

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas.
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M : « la personne est malade » ;
- T : « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,065 3.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
5. On choisit 10 personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

(a) Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

(b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On indiquera la formule utilisée et on arrondira le résultat à 10^{-2} près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %. Indiquer la méthode utilisée.

Exercice 4 — 6 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
4. On considère le script python suivant :

```
def g(a):
    n = 0
    L = []
    y = 0
    while y < a:
        y = n - ln(n**2 + 1)
        L.append(y)
        n = n+1
    return L
```

([ ] désigne la liste vide et on suppose que ln a été définie avant).

(a) Que fait cette fonction ?

(b) Que retourne g(2) ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite. Déterminer la valeur de ℓ.