

$$u_0 = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$$

1) • Montrons par récurrence que $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation: $u_0 = -1$ $u_1 = \frac{3 + 2u_0}{2 + u_0} = \frac{1}{1} = 1 \geq 0$.

- Hérité: supposons que $u_n \geq 0$ pour un $n \geq 1$.

Alors $2u_n \geq 0$ $\begin{matrix} \times 2 \\ \hline \end{matrix}$
 $3 + 2u_n \geq 3$ $\begin{matrix} +3 \\ \hline \end{matrix}$

D'autre part $u_n \geq 0$ donne $2 + u_n \geq 2 > 0$
 u_{n+1} est le quotient de deux positifs (et le dénominateur ne s'annule pas). Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 0$.

- Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$

• Soit $f: x \mapsto \frac{3+2x}{2+x}$ définie sur $[0; +\infty[$. f est dérivable sur cet intervalle (quotient de fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas) et $f'(x) = \frac{1}{(2+x)^2} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$\frac{3}{2}$	2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

- Comme $u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) \in [\frac{3}{2}; 2]$, soit $u_{n+1} \leq 2$.

- Comme $u_1 = 1 \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2$

2) • Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- Initialisation: $u_1 = 1 \leq u_2 = \frac{5}{3}$

- Hérité: supposons que, pour un $n \geq 1$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Alors, comme f croît sur $[0; +\infty[$ (et $u_n \in [0; +\infty[$),

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

$u_{n+1} \leq u_{n+2}$. L'hérité est démontrée.

- Conclusion: $\forall n \geq 1 \quad u_n \leq u_{n+1}$.

Donc (u_n) croît $\quad (u_0 = -1 \leq u_1 = 1)$

• (u_n) croît et est majorée (par 2). Donc (u_n) converge.
 Soit L sa limite.

Comme f est continue, L est solution de $L = f(L)$:

$$L = \frac{3+2L}{2+L} \quad \} \times (2+L)$$

$$L(2+L) = 3+2L$$

$$L^2 = 3$$

$$L = \pm\sqrt{3}$$

Comme $u_n \geq 0 \quad \forall n$, $\boxed{L = \sqrt{3}}$