

$$| \mu_1 = 1 \quad \mu_{n+1} = \ln(1 + \mu_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrons par récurrence que $\mu_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

• Initialisation: $\mu_1 = 1 > 0$

• Hérité: supposons que $\mu_n > 0$ (pour un $n \geq 1$)

$$\begin{array}{l} \mu_{n+1} > 1 \quad \downarrow +1 \\ \ln(\mu_{n+1}) > \ln(1) \quad \downarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \mu_n > 0 \\ \mu_{n+1} > 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ln croît strictement} \\ \text{sur }]0, +\infty[\end{array}$$

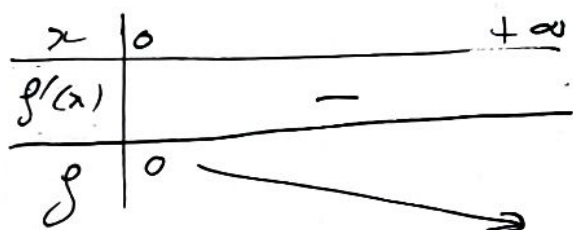
• Conclusion: pour tout $n \geq 1$, $\mu_n > 0$

2) Montrons que $\ln(1+x) - x \leq 0$, $\forall x \geq 0$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x) - x$ ($\text{sur } [0; +\infty[$)

f est dérivable sur cet intervalle: $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$

$$\text{ici } x \geq 0 \text{ donc } \begin{array}{l} \bullet -x \leq 0 \\ \bullet 1+x \geq 1 > 0 \end{array} \quad \text{Donc } f'(x) \leq 0$$



D'après les variations, $\forall x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$, c'est-à-dire $\ln(1+x) - x \leq 0$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mu_{n+1} - \mu_n = \ln(1 + \mu_n) - \mu_n = f(\mu_n)$.

D'après 1), $\mu_n > 0$ et d'après 2), sur $[0; +\infty[$,

$f(\mu_n) \leq 0$. Donc $\mu_{n+1} - \mu_n \leq 0$: (μ_n) décroît

4) (μ_n) décroît et est minorée. Donc (μ_n) converge.

Notons L sa limite. Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0; +\infty[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + \mu_n) = \lim_{x \rightarrow L} \ln(1+x) = \ln(1+L).$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{n+1} = L$. Donc L est solution de

$$L = \ln(1+L)$$

$$0 = \ln(1+L) - L$$

D'après les variations de f , $L = 0$ est l'unique solution.