8.5 Fonction exponentielle

Pour tout réel $\boldsymbol{x}$:

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x)} \qquad \boxed{\exp(0) = 1} \qquad \boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$$

Propriétés algébriques

Pour tous les réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned}
&(1)\ \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)\\
&(2)\ \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}\\
&(3)\ \exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}\\
&(4)\ \exp(na) = (\exp a)^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Notation e^x

Le réel exp(1) est noté e.

$$\boxed{\exp(1) = e \simeq 2{,}718}$$

On constate donc que, pour tout n entier relatif, $\exp(n) = (exp(1))^n = e^n$.

On notera e^x le nombre $\exp(x)$, pour tout nombre réel x.

Ainsi les propriétés algébriques s'écriront : Pour tous les réels a et b

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad e^{a+b} = e^a e^b\\
&(2) \qquad e^{-b} = \frac{1}{e^b}\\
&(3) \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}\\
&(4) \qquad (e^a)^n = e^{na} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Exemples :

$$e^{x+2} = e^x \times e^2 \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad e^0 = 1 \quad ; \quad e^1 = e$$

Etude de la fonction exp

Par définition, exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{pour tout } x \ : \ e^x > 0}$$

Sa dérivée (elle-même) est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$ donc exp est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 $\nearrow$	$+\infty$

La fonction exp est strictement croissante de $]-\infty\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$. Donc, pour tous nombres réels a et b :

$$e^a = e^b \text{ équivaut à } a = b$$
$$e^a < e^b \text{ équivaut à } a < b$$

Courbe représentative

L'axe (xx') est asymptote à la courbe représentative de exp en $-\infty$.

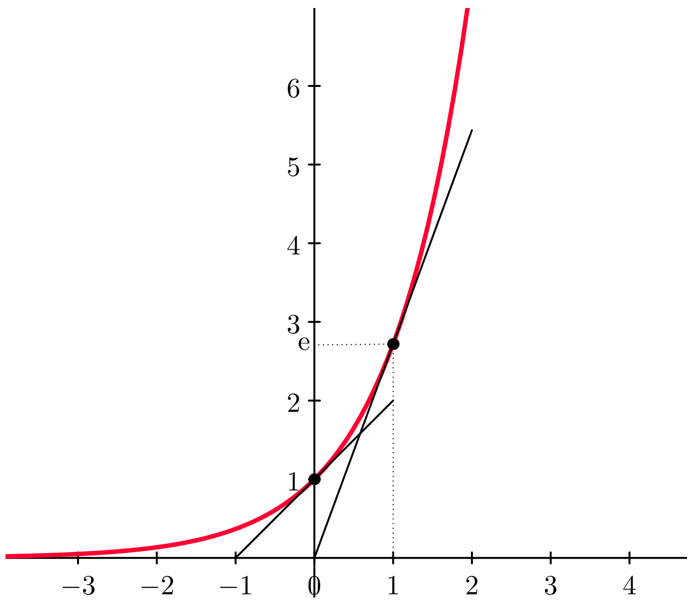


FIGURE 8.4 – Courbe représentative de exp

Points remarquables : (0 ;1) et (1 ;e).

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = ex$. Cette droite passe par l'origine du repère.

Une équation de la tangente en $x = 0$ est : $y = x + 1$.

Deux limites à connaître

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0}$$

On dit souvent : « à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur x^n.

Etude de la fonction $exp \circ u$

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, la fonction $\exp u$ notée aussi e^u est dérivable sur I, et l'on a :

$$\boxed{(e^u)' = u' \times e^u}$$

Exemple 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x^2 + 9)$$

En notant $u(x) = -x^2 + 9$:

$$f'(x) = -2x\exp(-x^2 + 9)$$

Exemple 2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

Ici $u(x) = \frac{1}{x}$ et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

Exercices sur la fonction exponentielle

Exercice 8.25. Simplifier $A = e^5 \times e^{11}$; $B = \dfrac{e^3 e^{10}}{e^{12}}$; $C = (e^{-4})^2 e^{-1} e e^8$.

Exercice 8.26. Résoudre, éventuellement en donnant des valeurs approchées : $e^x = 3$; $e^x = 1000$; $e^x > e^2$; $e^{-x^2+5x} > 1$; $2 - e^{-x} > 1{,}9$

Exercice 8.27. Donner le tableaux des variations complets des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x - 7$, $g(x) = e^x - 2x + 5$ et $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exercice 8.28. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes : $x \mapsto e^{1-2x}$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$; $x \mapsto e^{\cos x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.29. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. Déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 8.30. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto e^{x^3+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Donner l'équation réduite de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse -1.

Exercice 8.31.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-3x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est croissante sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.
3. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^{\cos x}$ est décroissante sur $[0;\pi]$.

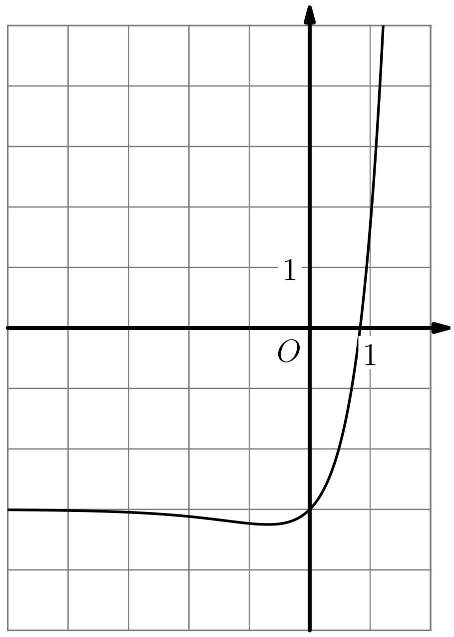
Exercice 8.32. Equations, inéquations : $e^x = 1$; $e^{2x} = e$, $e^{x^2+2} = e^2$; $e^x < 1$; $e^{x^2} \geqslant e^3$, $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

Exercice 8.33. On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 3.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   (c) On en déduit que $\mathscr{C}$ admet, au voisinage de $-\infty$, une asymptote Δ. Donner une équation de Δ.
2. (a) f' désigne la dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.
   (b) Pour tout réel x, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = g(x)\left(\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\right)$.
   Donner l'expression de $g(x)$.
   (c) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, prouver que l'équation : $\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2} = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de cette solution α.
   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (e) Calculer la valeur exacte de $f(\alpha)$ sachant que α est solution de $\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2} = 0$.



3. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T_0 sur la figure.
4. Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ parallèle à la droite d'équation $y = 3x$? Toute trace de recherche sera prise en compte.