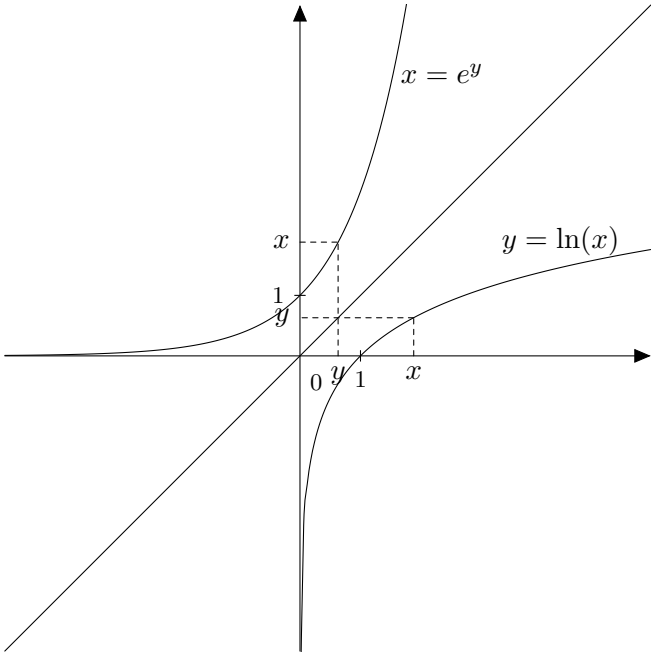
8.6 Fonction logarithme népérien

Rappels : fonction réciproque de exp.



Définition 18. La fonction logarithme népérien, notée ln est la fonction :

$$\begin{aligned} \ln \ : \quad]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \ln(x) \qquad \text{tel que } e^y = x \end{aligned}$$

Remarques :

on dit que ln est la fonction réciproque de exp.

$\ln(x)$ est souvent noté $\ln x$

Propriété 5.

Pour tout $x > 0$ et y réel : $e^y = x$ équivaut à $y = \ln x$

Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

Pour tout x : $\ln(e^x) = x$

$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

Propriété 6. a et b désignent des nombres réels strictement positifs, et n désigne un nombre entier relatif.

Logarithme d'un produit :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

Logarithme d'un quotient :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

Logarithme d'un inverse :

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)}$$

Logarithme d'une puissance :

$$\boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)}$$

Logarithme d'une racine carrée :

$$\boxed{\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)}$$

On dit que la fonction ln transforme les produits en sommes.

Exemples :

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 \qquad \ln 1{,}5 = \ln 3 - \ln 2 \qquad \ln 0{,}5 = -\ln 2$$
$$\ln 9 = 2\ln 3 \qquad \ln(10^n) = n\ln 10 \qquad \ln 3 = \frac{1}{2}\ln 9$$

8.6.1 Etude de la fonction ln

Par définition ln est définie sur $]0;+\infty[$.
Variations : ln *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$.
Continuité : ln est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Dérivabilité : ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\ln' x = \frac{1}{x}}$$

Limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty}$$

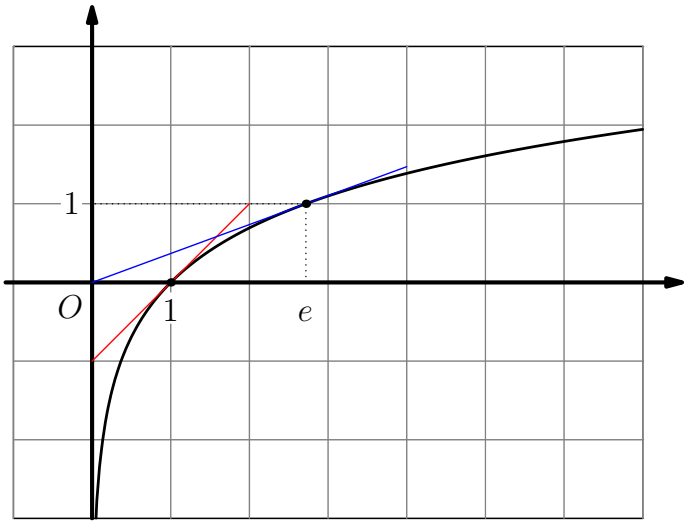
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$$

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
ln	$\|\|$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Courbe représentative

La courbe représentative de ln admet l'axe des ordonnées pour asymptote quand $\substack{x\to 0\\ x>0}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormal. On place les deux points $(1\,;0)$ et $(e\,;1)$.
La tangente au point d'abscisse e passe par O.



Croissances comparées

En $+\infty$, e^x l'emporte sur x qui l'emporte sur $\ln x$ (voir le graphique de la première page).

8.6.2 Etude de ln(u)

Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction $\ln \circ u$ est définie et dérivable sur I et l'on a :

$$\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

Exemple : soit f définie sur]-3 ;3[par

$$f(x) = \ln(-x^2 + 9)$$

En posant $u(x) = -x^2 + 9$. On a bien $u(x) > 0$ sur]-3 ;3[.

$$f'(x) = \frac{-2x}{-x^2 + 9}$$

Supplément : logarithme décimal, logarithme de base a

Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$\boxed{\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log\left(10^n\right) = n$$

Pour tout $x > 0$:

$$10^{\log(x)} = x$$

($10^{\log(x)}$ a bien un sens ...)

De manière générale, on note $x \mapsto \log_a(x)$ les fonctions logarithmes à base a (où a est un réel strictement positif). Pour tout réel $x > 0$,

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Le logarithme décimal peut se noter $\log_{10}$.

On pourrait dire que le logarithme népérien du lycée est un « logarithme à base e » (mais cela reviendrait à le définir à partir de lui même) : $\ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)}$.

Attention ! D'autres pays, de vieux manuels, des logiciels de calcul et certains langages de programmation utilisent les notations $Log(x)$, $\log_e(x)$, ou $\log(x)$ à la place de $\ln(x)$. En France, depuis un demi-siècle, ln désigne le logarithme népérien et log le logarithme décimal.

En informatique, on utilise souvent le logarithme à base 2, $\log_2$ (voir exercices).

Exercices sur la fonction logarithme népérien

Exercice 8.34. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x = 5$; $e^{x^2} = 4$; $e^{-x} = 2$; $e^x = -2$.

Exercice 8.35. Écrire les nombres A, B, C en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$$A = \ln\left(\frac{9 \times 5^2}{24}\right) \quad ; \quad B = \ln\left(\frac{200}{27}\right) \quad ; \quad C = \ln\left(\frac{\sqrt{135}}{32}\right)$$

Exercice 8.36. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

$f(x) = 2\ln x - x\ln 2$ sur $I =]0; +\infty[$.

$g(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$ sur $I =]0; 1[$.

$h(x) = (1 - x^2)\ln x$ sur $I =]0; +\infty[$.

$p(x) = e^{1+\ln x}$ sur $I =]0; +\infty[$.

Exercice 8.37. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $\ln(2x - 3) = \ln 2$

(b) $\ln(2x - 3) = -2$

(c) $\ln(2x - 3) = 0$

(d) $\ln(2x - 3) = 5$

(e) $\ln x < 10$

(f) $\ln(x^2 - 2x) < \ln 3$

Exercice 8.38. Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = \ln(1 - e^x)$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en 0. Que peut-on en déduire ?
2. Étudier le sens de variation de g. Dresser son tableau de variations.
3. Résoudre l'équation $g(x) = -10$.

Exercice 8.39. Étudier les variations et les limites sur $]0; +\infty[$ de f et g :

$$f(x) = \ln\left(3x^2 + 1\right) \quad ; \quad g(x) = x\ln x - 2x$$

Exercice 8.40. BTS SIO 2015

A. étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 6,5] par :

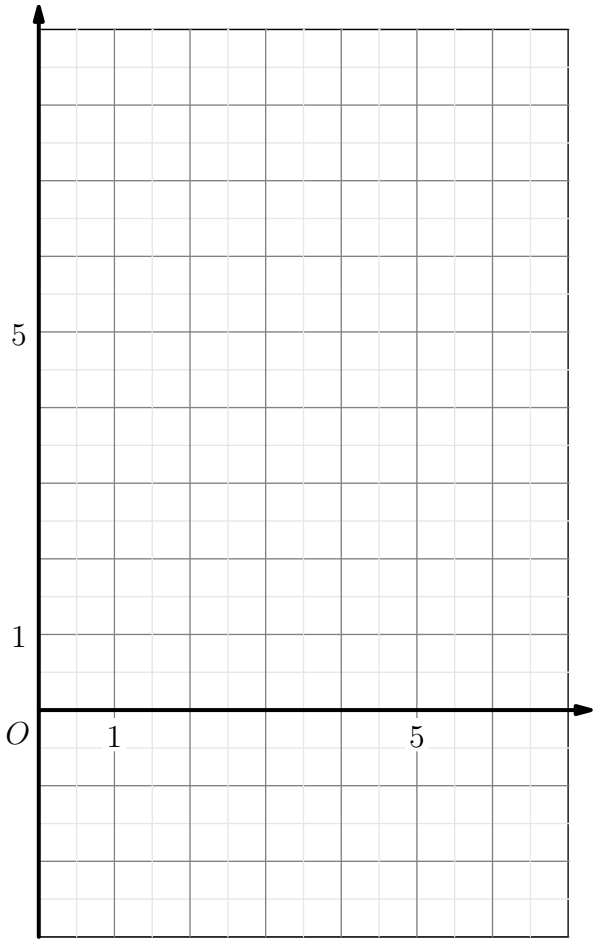
$$f(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 6,5], on a :
   $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)(x-4)}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 6,5].
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
2. (a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au dixième.

x	1	2	3	4	5	6	6,5
$f(x)$							

   (b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère.



3. Soit F la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 6,5] par :

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - 16x\ln(x).$$

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 6,5].

B. Applications à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces qu'elle conditionne par paquets de cent. Sa fabrication journalière varie entre 100 pièces et 650 pièces.

Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour q centaines de pièces fabriquées ($1 \leqslant q \leqslant 6{,}5$), est modélisé par $f(q)$, où f est la fonction définie dans la partie **A**.

1. (a) Justifier que l'équation $f(q) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[4\,;\,6{,}5]$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution.
   (b) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.
2. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer cc bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.
3. Avec la modélisation choisie, le bénéfice moyen B_m réalisé par l'entreprise, s'exprime, en milliers d'euro, par :

$$B_m = \frac{1}{5{,}5} \times \int_1^{6{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

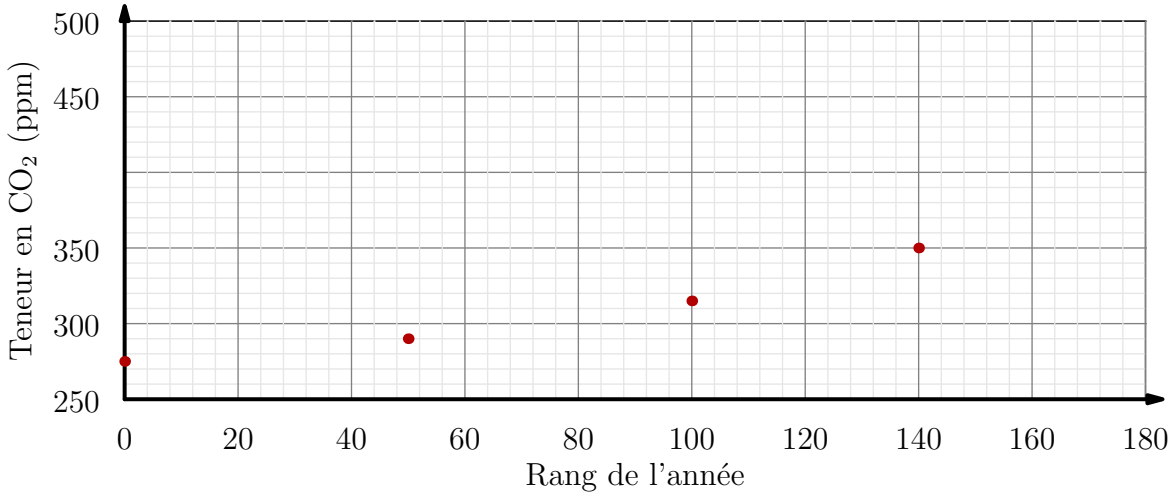
Calculer ce bénéfice moyen, arrondi à la centaine d'euro.

Exercice 8.41. Le tableau suivant indique la teneur de l'air en dioxyde de carbone (CO_2), observée depuis le début de l'ère industrielle.

Dans le tableau ci-dessous, x_i représente le rang de l'année et y_i la teneur en CO_2 exprimée en parties par million (ppm).

Année	1850	1900	1950	1990
Rang de l'année x_i	0	50	100	140
Teneur en CO_2 y_i	275	290	315	350

On a représenté dans le repère ci-après le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.



On veut modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. Plusieurs types de fonctions semblent utilisables.

1. Modélisation par une fonction affine
   (a) À l'aide d'une calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire, arrondi au centième, de la série (x_i, y_i).

(b) À l'aide d'une calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme

$y = ax + b$, avec a arrondi au centième et b à l'unité. Représenter cette droite dans le repère ci-dessus.

(c) Selon ce modèle, quelle teneur en CO_2 peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point M correspondant à cette prévision.

2. Modélisation par une fonction f définie par $f(x) = 250 + B\mathrm{e}^{Ax}$.

On pose $z_i = \ln(y_i - 250)$. Vérifier que la série $(x_i\ ;\ z_i)$ a pour coefficient de corrélation linéaire 0,999 et qu'une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés est : $z = 0{,}01x + 3{,}2$.

(a) Selon ce modèle, quelle teneur en $C0_2$ peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point N correspondant à cette prévision.

(b) Donner une équation de la courbe d'ajustement de y en x, sous la forme $y = f(x) = 250 + B\mathrm{e}^{Ax}$, avec A arrondi au centième et B à l'unité.

(c) En déduire des valeurs approchées décimales arrondies à l'unité près de $f(0), f(50), f(100), f(140)$.

3. Laquelle des deux prévisions de la teneur en CO_2 pour 2010 vous semble la plus plausible ? Pourquoi ?

Exercice 8.42. Il faut un chiffre décimal pour représenter 10 nombres, deux chiffres pour 100 nombres, trois pour 1000, etc. Représenter un parmi N nombres requiert ..... chiffres décimaux, ou ..... chiffres binaires

Exercice 8.43. Logarithme de base a. Pour tout réel $x > 0$, et tout $a > 0$, on pose $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
Prouver que pour tout réel $x > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_{10}(10^n) = n \qquad \text{et} \qquad 10^{\log_{10}(x)} = x$$

$$\log_2(2^n) = n \qquad \text{et} \qquad 2^{\log_2(x)} = x$$