**Exercice 8.40**

**A. étude d'une fonction**

1. (a) Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;\,6{,}5]$, $f$ est dérivable et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\times 2x + 20 - 0 - 16\frac{1}{x} \\ &= -4x + 20 - \frac{16}{x} \\ &= \frac{-4x^2+20x-16}{x} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{-4(x-1)(x-4)}{x} = \dfrac{-4(x^2-4x-x+4)}{x} = \dfrac{-4x^2+20x-16}{x} = f'(x)$.

Ainsi on a bien : $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)(x-4)}{x}$

(b) étude du signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,6{,}5]$ : sur cet intervalle, le dénominateur est positif. $f'(x)$ est donc du signe de -4 sauf entre les racines du polynôme : 1 et 4.

| $x$ | 1 | | 4 | | 6,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

(c) D'après la question précédente on obtient le tableau de variation de la fonction $f$ suivant :

| $x$ | 1 | | 4 | | 6,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | $30-16\ln 4$ | $\searrow$ | |

2. (a)

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2,9 | 6,4 | 7,8 | 6,2 | 1,3 | $-2{,}5$ |

(b) Courbe $\mathcal{C}_f$.

3. $F(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - 16x\ln(x)$ donc on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{2}{3}\times 3x^2 + 10\times 2x - 2 - 16\left(x\times\frac{1}{x} + 1\times\ln(x)\right) \\ &= -2x^2 + 20x - 2 - 16 - 16\ln(x) \\ &= -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln(x) = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;\,6{,}5]$.

**B. Applications à l'économie**

1. (a) $f$ est continue sur $[4\,;\,6{,}5]$ avec $f(4) > 0$ et $f(6{,}5) < 0$ donc l'équation $f(q) = 0$ admet une solution sur $[4\,;\,6{,}5]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De plus $f$ est strictement décroissante sur cet intervalle donc la solution est unique.
   On trouve $f(q) = 0$ sur l'intervalle $[4\,;\,6{,}5]$ pour $q \approx 6{,}19$
   (b) Ainsi l'entreprise réalise un bénéfice ($f(q) > 0$) si elle fabrique jusqu'à 619 pièces.
2. Afin d'obtenir le bénéfice maximal, l'entreprise doit fabrique 400 pièces (maximum de $f$ pour $q = 4$ d'après la partie A).
   Ce bénéfice maximal est alors de $f(4) = 7{,}8$ milliers d'euro (soit 7800 euros à la centaine d'euros près)
3. $$B_m = \frac{1}{5{,}5} \times \int_1^{6{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5{,}5} \times [F(x)]_1^{6{,}5} = \frac{1}{5{,}5} \times (F(6{,}5) - F(1)) \approx 4{,}4$$
   Le bénéfice moyen est de 4,4 milliers d'euros, arrondi à la centaine d'euro.