

# BTS SIO

## Intégration

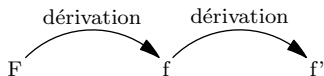
Lycée Carcouët

17 mars 2024

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  ; on appelle **primitive** de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  définie et dérivable sur  $I$  telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout  $x$  de  $I$ .



Trouver des primitives n'est pas souvent simple : à l'examen elles sont données.

Exemples :

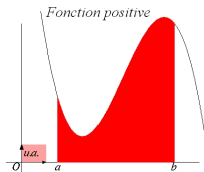
- ① Une primitive de  $f$  définie par  $f(x) = 2x$  est  $F$  définie par  $F(x) = x^2$ .  
En effet  $F'(x) = f(x)$ .
- ② Une primitive de  $f$  définie par  $f(x) = x + 5$  est  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x$ .  
Une autre est  $G$  définie par  $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 741$ .
- ③ Une primitive de  $f$  définie par  $f(x) = x^4 + 7x^3$  est  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{7}{4}x^4$ .
- ④ Une primitive de  $f$  définie par  $f(x) = 4e^{4x}$  est  $F$  définie par  $F(x) = e^{4x}$ .

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $[a; b]$ , ( $a < b$ ) continue et **positive** sur cet intervalle.  $\mathcal{C}_f$  est sa courbe représentative dans le repère orthogonal du plan  $(O, I, J)$ .

$\mathcal{D}$  est la partie du plan délimitée par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  :

**L'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est par définition l'aire de  $\mathcal{D}$ ,** mesurée en unités d'aires. On note :

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}(\mathcal{D})$$



(u.a : unité d'aire)

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors pour tous réels  $a$  et  $b$  dans  $I$ , on a :

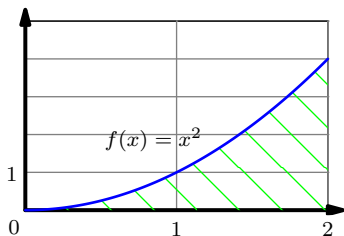
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Exemple : l'aire sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 2 est :

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2 dx &= F(2) - F(0) \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

NB : pour  $f(x) = x^2$ , une primitive a pour expression  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ .



## Valeur moyenne d'une fonction

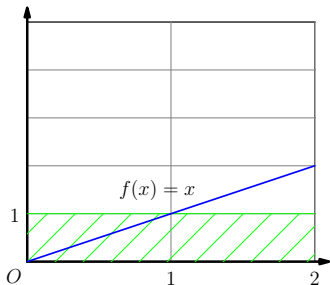
$f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a; b]$  le nombre :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemple 1 : la valeur moyenne sur  $[0 ; 2]$  de  $x \mapsto f(x) = x$  est

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} (F(2) - F(0)) = \frac{1}{2} \left( \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 1$$

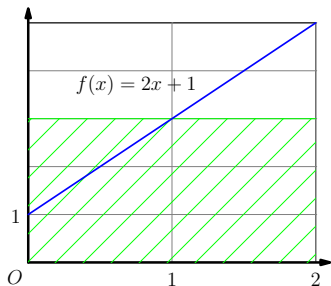
$$(F(x) = \frac{x^2}{2})$$



Exemple 2 : la valeur moyenne sur  $[0;2]$  de  $x \mapsto f(x) = 2x + 1$  est

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 (2x+1)dx = \frac{1}{2}(F(2)-F(0)) = \frac{1}{2} (2^2 + 2 - (0^2 + 0)) = 3$$

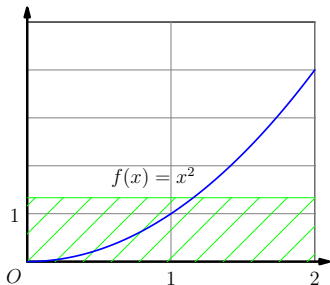
$$(F(x) = x^2 + x)$$



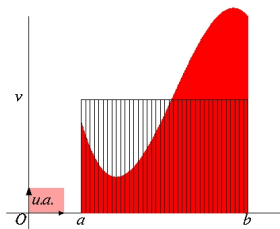
Exemple 3 : la valeur moyenne sur  $[0 ; 2]$  de  $x \mapsto f(x) = x^2$  est

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}(F(2) - F(0)) = \frac{1}{2} \left( \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$(F(x) = \frac{x^3}{3})$$



Interprétation graphique : l'aire délimitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$  est égale à l'aire du rectangle de longueur  $b - a$  et de hauteur la valeur moyenne  $v$ .



## Calcul formel

Souvent, à l'examen, dérivées, primitives ou la valeur d'une intégrale sont données par un logiciel de calcul formel.

Résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

|   |                                             |                               |
|---|---------------------------------------------|-------------------------------|
| 1 | deriver((x-2)*exp(-0.5x+3))                 | $(-0.5x+2.0)*\exp(-0.5x+3.0)$ |
| 2 | deriver(-2x*exp(-0.5x+3))                   | $(x-2.0)*\exp(-0.5x+3.0)$     |
| 3 | integrer((-0.5x+2.0)*exp(-0.5x+3.0),x,2,22) | 0.00670925256                 |
| 4 | integrer((x-2)*exp(-0.5x+3),x,3,5)          | 10.40292172                   |
| 5 | limite((x-2)*exp(-0.5x+3),x,+infinity)      | 0                             |

ligne 3 :  $\int_2^{22} (-0,5x + 2)e^{-0,5x+3} dx \simeq 0,00670925256$

ligne 4 :  $\int_3^5 (x - 2)e^{-0,5x+3} dx \simeq 10,40292172$

ligne 5 :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)e^{-0,5x+3} = 0$

► Calcul formel

|   |                                                                                              |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $0,7\exp(0,5x+2)$<br>Dérivée : $\frac{7}{20}e^{\frac{1}{2}x+2}$                              |
| 2 | $0,7\exp(0,5x+2)$<br>Intégrale : $\frac{7}{5}e^{\frac{1}{2}x+2} + c_1$                       |
| 3 | $10\ln(20/x)$<br>Dérivée : $-\frac{10}{x}$                                                   |
| 4 | $10\ln(20/x)$<br>Intégrale : $10 \left[ x \ln \left( \frac{20}{x} \right) + x \right] + c_2$ |

Ici, intégrale signifie primitive...

$c_1$  et  $c_2$  sont des constantes : leur dérivée vaut bien 0. Le logiciel donne toutes les primitives possibles.