9.1 Corrigés

Corrigé de l'exercice 9.1

Les suites suivantes sont arithmétiques.

1. Sachant que $u_0 = 5$ et $u_{10} = 17$, calculons la raison a.
   De
   $$u_{10} = u_0 + 10a$$
   on déduit
   $$\begin{aligned} a &= \frac{u_{10} - u_0}{10} \\ a &= \frac{17 - 5}{10} \\ a &= 1{,}2 \end{aligned}$$

2. Sachant que $u_7 = 2$ et $u_9 = 1$, calculons u_{13}.
   De
   $$u_9 = u_7 + 2a$$
   on déduit
   $$\begin{aligned} a &= \frac{u_9 - u_7}{2} \\ a &= \frac{1 - 2}{2} \\ a &= -0{,}5 \end{aligned}$$
   Puis
   $$u_{13} = u_9 + 4a = 1 + 4 \times (-0{,}5) = -1$$
   Remarque : on pouvait calculer u_{13} sans calculer la raison a :
   $$\begin{tikzcd} u_7 \arrow[rr, bend left, "-1"] & u_8 & u_9 \arrow[rr, bend left, "-1"] & u_{10} & u_{11} \arrow[rr, bend left, "-1"] & u_{12} & u_{13} \end{tikzcd}$$

3. Sachant que $u_{100} = 4$ et $a = 2$, calculons u_2.
   De
   $$u_{100} = u_2 + 98a$$
   on déduit
   $$\begin{aligned} u_2 &= u_{100} - 98a \\ &= 4 - 98 \times 2 \\ u_2 &= -192 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9.2

Dans cet exercice les suites sont géométriques.

1. Avec $u_0 = 5$ et $b = 3$, on a : $u_{15} = u_0 \times 3^{15} = 71\,744\,535$
2. $u_8 = 10$, $u_9 = 11$. Calculons u_0.
   Comme $u_9 = b \times u_8$, la raison est $b = \dfrac{u_9}{u_8} = 1{,}1$.
   D'après le cours, $u_8 = u_0 \times b^8$. Alors :
   $$u_0 = \frac{u_8}{b^8} = \frac{10}{1{,}1^8} \simeq 4{,}665$$

3. $u_8 = 5$, $u_{10} = 10$. Calculons u_{20}.

   De $u_{10} = b^2 \times u_8$, on déduit que $b^2 = \dfrac{u_{10}}{u_8} = 2$.

   $$u_{20} = u_{10} \times b^{10} = u_{10} \times (b^2)^5 = 10 \times 2^5 = 320$$

   NB : on ne sait pas si $b = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 9.3

1. (u_n) est la suite arithmétique de raison 5 qui commence à $u_0 = 4$.

   $$u_{4000} = u_0 + 4000 \times 5 = 20\,004$$

   $$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{4000} &= 4001 \times \frac{4 + 20\,004}{2} \\ &= 40\,026\,004 \end{aligned}$$

2. La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{20}$ est la somme de 21 termes d'une suite géométrique de raison 2.

   $$S = 1 \times \frac{1 - 2^{21}}{1 - 2} = 2\,097\,151$$

3. Calculons la somme des 100 premiers nombres impairs (le premier est 1).

   - Le premier terme est $u_0 = 1$.
   - Le deuxième est $u_1 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$
   - Le troisième est $u_2 = u_0 + 2 \times 2 = 1 + 4 = 5$
   - $\vdots$
   - Le centième est $u_{99} = u_0 + 99 \times 2 = 199$

   Leur somme vaut

   $$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 199 = 100 \times \frac{1 + 199}{2} = 10\,000$$

4. Calculons la somme des 10 premiers termes de la suite définie par :

   $$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1{,}5 \times a_n - 0{,}7 \end{cases}$$

   Cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique. On ne peut pas utiliser les formules du cours. On peut écrire un petit programme :

5. Calculons la somme des 30 premiers termes de la suite définie par :

   $$\begin{cases} c_0 = 100 \\ c_{n+1} = \frac{c_n}{2} \end{cases}$$

   C'est une suite géométrique de raison 0,5.

   $$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{29} &= 100 \times \frac{1 - 0{,}5^{30}}{1 - 0{,}5} \\ &\simeq 199{,}9999998 \end{aligned}$$

Calcul de sommes : quand on connaît le terme général en fonction de n, on peut utiliser le menu de calculatrice Σ :

Pour la question 1, $u_n = 4 + 5n$. On tape :

$$\sum_{N=0}^{4000}(4+5N)$$

Pour la question 2, $u_n = 2^n$. On tape :

$$\sum_{N=0}^{20}(2^N)$$

Pour la question 3, on ne connaît pas l'expression de a_n en fonction de n : on ne êut pas utiliser ce menu.

Pour la question 4, $c_n = 100 \times 0{,}5^n$. On tape :

$$\sum_{N=0}^{29}(100 * 0.5^N)$$

Sur Casio, on le trouve par : OPTN CALC $\triangleright$ $\sum($
Sur TI : math MATH $\sum($

Corrigé de l'exercice 9.4 BTS SIO Métropole mai 2014.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9\,000$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n.

Un terme u_n de cette suite correspond au nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année $1975 + 2n$.

1. $u_1 = u_0 \times 2 = 9000 \times 2 = 18\,000$
   et $u_2 = u_1 \times 2 = 18\,000 \times 2 = 36\,000$
   En 1977, le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année sera de 18 000. En 1979, le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année sera de 36 000.
2. La suite (u_n) est géométrique de raison 2. Pour tout entier n,
   $$u_n = u_0 \times 2^n = 9000 \times 2^n$$
3. Le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué en 2001 $(1975 + 2 \times 13)$ sera
   $$u_{13} = 9000 \times 2^{13} = 73\,728\,000$$
4. Selon ce modèle, les micro-processeurs intégreront plus de 100 milliards de transistors en 2023 :
   $$u_{23} = 9000 \times 2^{23} \simeq 75 \text{ milliards}$$
   $$u_{24} = 9000 \times 2^{24} \simeq 150 \text{ milliards}$$

Corrigé de l'exercice 9.5. BTS SIO Polynésie mai 2014.

Le renouvèlement du parc informatique est échelonné sur 12 trimestres, pour un coût total de 95 500 €.

Le service comptable propose le financement suivant :

• pour le 1er trimestre, verser un montant de 6 000 € ;

• chaque trimestre, le montant versé augmente de 5 % par rapport à celui du trimestre précédent.

On note u_n le montant, exprimé en euro, versé le n-ième trimestre. On a donc $u_1 = 6\,000$.

1. $u_1 = 6000$
   $u_2 = 6000 \times 1{,}05 = 6300$
   $u_3 = 6300 \times 1{,}05 = 6615$
2. Chaque trimestre, on multiplie par 1,05, donc la suite est géométrique de raison 1,05.
3. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times 1{,}05^{n-1}$, soit $\boxed{u_n = 6000 \times 1{,}05^{n-1}}$
   (b) $u_{12} = 6000 \times 1{,}05^{12-1} \simeq 10262$
4. $u_1 + u_2 + \cdots + u_{12} = 6000 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{12}}{1 - 1{,}05} \simeq 95502{,}76$
   Le financement prévu permet juste de renouveler le parc.

Corrigé de l'exercice 9.6

1. En 2006, les salaires annuels pour les deux formules sont $u_0 = v_0 = 12 \times 1200 = 14\,400$.
2. En 2007, pour la formule A, le salaire mensuel devient $1200 + 20 = 1220$, donc le salaire annuel est
$$u_1 = 12 \times 1220 = 14\,640$$
   Pour la formule B, le salaire mensuel devient $1200 \times \left(1 + \dfrac{1{,}5}{100}\right) = 1218$, donc le salaire annuel est
$$v_1 = 12 \times 1218 = 14\,616$$
3. La suite (u_n) est arithmétique de raison $20 \times 12 = 240$ car chaque année, le salaire annuel augmente de 240.
   La suite (v_n) est géométrique de raison 1,015 car chaque année, le salaire annuel est multiplié par $\left(1 + \dfrac{1{,}5}{100}\right) = 1{,}015$.
4. Pour tout entier n,
$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 240}$$
   et
$$\boxed{v_{n+1} = 1{,}015 v_n}$$
5. Pour tout n,
$$\boxed{u_n = 14400 + 240n}$$
   et
$$\boxed{v_n = 14400 \times 1{,}015^n}$$
6. En 2016 , $u_{10} > v_{10}$:
$$u_{10} = 14400 + 240 \times 10 = 16800$$
$$v_{10} = 14400 \times 1{,}015^{10} \simeq 16711{,}79$$
   En 2026 , $u_{20} < v_{20}$:
$$u_{20} = 14400 + 240 \times 20 = 19200$$
$$v_{20} = 14400 \times 1{,}015^{20} \simeq 19394{,}71$$

7. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes, donc à $n = 41$.
   Avec la formule A, il gagnerait

$$\begin{aligned} S_{41} &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{41} \\ &= 42 \times \frac{u_0 + u_{41}}{2} \\ &= 42 \times \frac{14400 + 24240}{2} \\ &= \boxed{811\,440 \text{ euros}} \end{aligned}$$

   Avec la formule B, il gagnerait

$$\begin{aligned} T_{41} &= v_0 + v_1 + \ldots + v_{41} \\ &= v_0 \times \frac{1 - 1{,}015^{42}}{1 - 1{,}015} \\ &= 14400 \times \frac{1 - 1{,}015^{42}}{1 - 1{,}015} \\ &\simeq \boxed{834\,093 \text{ euros}} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9.7. Polynésie 2017 (9 points)
pdf