

5.8 Ordonnancement : méthode MPM

On ordonne le graphe des tâches par niveaux, en ajoutant une tâche « Début » et une tâche « Fin ».

Chaque sommet est représenté par un petit tableau comme ci-dessous. Souvent, les marges ne sont pas présentes.

Nom de la tâche	
Date au plus tôt	Date au plus tard
Marge totale	Marge libre

J	
$T(J)$	$t(J)$
$MT(J)$	$ML(J)$

Date au plus tôt de début d'une tâche

La tâche au plus tôt $T(J)$ de début d'une tâche J est la date à partir de laquelle toutes les tâches précédant (immédiatement) J sont terminées.

$T(J)$ est le plus grand des nombres $T(l) + d(l)$ où

l est une tâche précédant immédiatement J ,

$T(l)$ est la date au plus tôt de début de la tâche l ,

$d(l)$ est la durée de la tâche l .

Date au plus tard de début d'une tâche

La date au plus tard $t(J)$ de début d'une tâche J est la date la plus grande permettant de commencer la tâche sans retarder la fin du projet.

$t(J)$ est le plus petit des nombres $t(K) - d(J)$ où

K est une tâche succédant immédiatement à J ,

$t(K)$ est la date au plus tard de début de la tâche K ,

$d(J)$ est la durée de la tâche J .

Marge totale d'une tâche

La marge totale $MT(J)$ d'une tâche J est le retard maximum possible pour le début de la tâche J sans retarder la fin du projet.

$$MT(J) = t(J) - T(J)$$

où

$t(J)$ est la date au plus tard de début de la tâche J ,

$T(J)$ est la date au plus tôt de début de la tâche J .

Marge libre d'une tâche

La marge libre $ML(J)$ d'une tâche J est le retard maximum possible pour le début de la tâche J sans retarder la date au plus tôt de début de chaque tâche suivant immédiatement J .

$ML(J)$ est le plus petit des nombres $T(K) - T(J) - d(J)$, où

K est une tâche succédant immédiatement J ,

$T(K)$ et $T(J)$ sont les dates au plus tôt des tâches K et J ,

$d(J)$ est la durée de la tâche J .

Tâche et chemin critiques

Une **tâche critique** est un tâche de marge totale nulle.

Un **chemin critique** est constitué d'une succession de tâches critiques reliant le début à la fin.

La **durée minimale** de réalisation d'un projet est la valeur d'un chemin critique, c'est-à-dire la somme des durées des tâches critiques qui le constituent.

Exercice 5.15. La mise en service d'un nouvel équipement routier demande la réalisation d'un certain nombre de tâches. Le tableau ci-dessous représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Durées (jours)	6	3	6	2	4	3	1
Tâches antérieures	-	-	-	B	B	A,D	C,E,F

1. Déterminer le niveau de chacune des tâches.
2. Construire le graphe d'ordonnancement du projet et calculer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.
3. Déterminer le chemin critique. Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ?
4. Calculer la marge totale de la tâche E ? Quelle est sa signification ?
5. Calculer la marge libre de la tâche C ? Quelle est sa signification ?

Exercice 5.16. La réalisation d'un projet nécessite plusieurs tâches successives dont les durées en jours sont données dans le tableau suivant, ainsi que les tâches devant être réalisées antérieurement.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Durées	4	2	2	1	2	5	3	3	3	4
Tâches antérieures	-	-	A	A	A,B	C	D,E	E,G	H	F,I

1. Déterminer le niveau de chacune des tâches.
2. Construire le graphe d'ordonnancement du projet et calculer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.
3. Déterminer le chemin critique. Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ?
4. En réalité, la tâche C a nécessité une durée de 5 jours. Est-ce que cela a eu une incidence sur la durée de réalisation du projet ?
5. Calculer la marge totale et la marge libre de chacune des tâches.

Exercice 5.17. Un projet est constitué de quinze tâches soumises aux contraintes suivantes.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Durées (jours)	5	3	1	4	2	3	3	4	5	2	1	4	3	5	1
Tâches antérieures	-	-	-	A,B	C	D	C,D	E	G	G,H	F,I	J	J	J	L,M

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. Déterminer le tableau des tâches par niveau.
2. Donner le tableau des successeurs.
3. Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode PERT ou MPM) et déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.
4. En déduire les chemins critiques et la durée minimale de réalisation du projet.

Exercice 5.18. La planification d'un projet de création d'un robot requiert les sept tâches listées ci-dessous.

Description de la tâche	Tâche	Durée (en jour)	Prédécesseurs
Achat de la structure	A	1	-
Modélisation numérique	B	5	A
Montage de la maquette	C	1	A, D
Achat des capteurs	D	3	-
Développement du programme	E	1	D
Test du programme sur la maquette et ajustements	F	4	C,E
Négociation des frais de fabrication	G	1	B,F

- Déterminer le niveau de chacun des sommets.
- Donner le tableau des successeurs de chaque sommet.
- Construire le graphe d'ordonnancement du projet (méthode M. P. M. ou P. E. R. T.) en incluant les dates au plus tôt et au plus tard.
- Donner un chemin critique et la durée minimale du projet.
- Calculer la marge libre et la marge totale de la tâche A.
- La tâche A commence avec un jour de retard.
 - Ce retard aura-t-il une incidence sur le début des tâches suivantes? Justifier.
 - Ce retard aura-t-il une incidence sur la date de fin du projet? Justifier.

Exercice 5.19. Une société de services et d'ingénierie informatiques planifie la mise en place d'un nouveau système d'information interne dans une entreprise. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet sont répertoriées dans le tableau suivant.

Tâche à réaliser	Repère	Durée en jours	Tâche(s) précédente(s)	Nombre d'intervenants nécessaires
Établissement du cahier des charges	A	2		2
Rédaction du cahier technique	B	2	A	2
Définition des droits d'accès aux données	C	1	B	1
Choix, achat du matériel	D	4	B	3
Installation du matériel	E	1	D	2
Formation des responsables techniques	F	2	C, D	1
Installation et paramétrage du système	G	2	C, E	2
Réduction de la notice d'utilisation et information des salariés	H	1	F, G	2

On souhaite ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que le nouveau système soit fonctionnel le plus tôt possible.

Pour cela, on considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. Déterminer le niveau de chacun des sommets de ce graphe.
2. Donner le tableau des successeurs de chaque sommet.
3. Construire le graphe d'ordonnement du projet (selon la méthode P. E. R. T. ou M. P. M.).
Déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.
En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.
4. Pour des questions de gestion du personnel, la société de services et d'ingénierie informatiques ne souhaite pas mobiliser plus de trois intervenants par jour. Peut-on planifier les tâches avec cette contrainte sans modifier la durée totale du projet ?

Exercice 5.20. Un lycée a été doté de postes informatiques et de logiciels.

Le proviseur envisage de transformer une salle de cours en salle informatique. Pour cela, le responsable du projet définit les tâches à réaliser avec leur durée.

Le tableau suivant regroupe l'ensemble de ces données.

Tâche à réaliser	Repère	Durée en jours	Tâches précédentes
Vider la salle de cours et démonter le matériel inutilisé.	A	2	–
Nettoyer et repeindre la salle.	B	4	A
Installer les tables et fixer un tableau.	C	1	B
Commander et réceptionner le matériel de câblage.	D	10	–
Déballer et contrôler le matériel de câblage livré.	E	1	D
Câbler la salle.	F	3	B, E
Installer et brancher les postes informatiques.	G	1	C, F
Installer les logiciels, configurer les postes et tester leur fonctionnement.	H	7	G

Le but de cet exercice est d'ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que la salle soit disponible le plus rapidement possible.

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe.
2. Donner le tableau des successeurs.
3. (a) Construire le graphe d'ordonnement du projet (selon la méthode P.E.R.T. ou M.P.M.)
Déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.
(b) En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.
4. En fait, la réalisation de la tâche B a nécessité 10 jours au lieu de 4 car il a fallu enduire un mur et le laisser sécher avant de le peindre.
Ce changement a-t-il une incidence sur la durée du projet ? Expliquer pourquoi.

Exercice 5.21. Une société de services techniques en informatique doit mettre en place un réseau interne de 50 ordinateurs pour une entreprise. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet ont été reproduites dans le tableau suivant.

Description de la tâche	Abréviation	Tâches antérieures	Durée (en jours)
Identification des besoins matériels/logiciels et commandes	COM		1
Acheminement/Livraison des OS/logiciels	LOG	COM	3
Achat du matériel pour les UC + Câbles réseau	MAT	COM	1
Acheminement/Livraison des écrans	ECR	COM	6
Assemblage des UC	ASS	MAT	1,5
Installation des OS/logiciels	INST	LOG, ASS	2
Pose des câbles réseau dans l'entreprise	CABL	MAT	4
Mise en place des postes dans l'entreprise	POST	INST, ECR	1
Configuration du réseau interne	CONF	POST, CABL	1

On considère le graphe orienté de sommets COM, LOG, MAT, ECR, ASS, INST, CABL, POST, CONF correspondant aux conditions d'antériorités données par le tableau précédent.

- Quels sont les prédécesseurs du sommet POST ?
 - Quels sont les successeurs du sommet COM ?
- Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe en expliquant la méthode utilisée.
- Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode MPM ou PERT) et établir les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.
- Déterminer le chemin critique et la durée de réalisation du projet.
- Calculer la marge totale de la tâche ASS. À quoi correspond-elle ?
 - Calculer la marge libre de la tâche ASS. À quoi correspond-elle ?