

Chapitre 3

Éléments de la théorie des ensembles

3.1 Produit cartésien de deux ensembles

Définition 2. Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y est un élément de F . On le note $E \times F$.

$$E \times F = \{(x, y) ; x \in E, y \in F\}$$

Exemple 1. Avec $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$,

$$E \times F =$$

Exemple 2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. C'est l'ensemble des coordonnées des points du plan muni d'un repère ... cartésien.

On définit de même le produit cartésien de n ensembles. Ses éléments sont des n -uplets.

Définition 3. Si un ensemble E a un nombre n fini d'éléments, on appelle ce nombre le **cardinal** de E . On le note $\text{card}(E)$.

Proposition 1. Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$, alors $\text{card}(E \times F) = n \times p$.

Exemple : pour l'exemple 1 ci-dessus, $\text{card}(E \times F) =$

3.2 Relations binaires

Exemple : quatre personnes a, b, c, d ont l'habitude de fréquenter certains supermarchés 1, 2, 3.

On peut représenter la situation à l'aide d'un tableau :

a	b	c	d
1, 2		1, 2, 3	2

d'un diagramme sagittal :

ou à l'aide d'une liste de couples de $E \times F : (a,1), (a,2), (c,1), (c,2), (c,3), (d,2)$.

On va utiliser le terme de relation binaire pour décrire ceci : la relation "fréquente" pourra être notée $\mathcal{R}$ et on écrira : $a\mathcal{R}1, a\mathcal{R}2, \dots$

Définition 4. Une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est la donnée d'une partie (un sous-ensemble) noté G de $E \times F$, appelée le graphe de $\mathcal{R}$.

Pour $x \in E$ et $y \in F$, $x\mathcal{R}y$ signifie $(x,y) \in G$.

On aura souvent $E = F$: la relation binaire $\mathcal{R}$ sera définie sur un ensemble E .

Exemple 1. égalité dans $E : x = y$

Exemple 2. inégalité large dans $\mathbb{R} : x \geq y$

Exemple 3. inégalité stricte dans $\mathbb{R} : x < y$

Exemple 4. divisibilité dans $\mathbb{N}^* : x \text{ divise } y$

Exemple 5. congruence modulo n dans $\mathbb{N} : x \equiv y \pmod{n}$

Définition 5. $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E .

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** si

$$\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$$

- $\mathcal{R}$ est **symétrique** si

$$\forall (x,y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si

$$\forall (x,y) \in E \times E \quad (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

- $\mathcal{R}$ est **transitive** si

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E \quad (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

- $\mathcal{R}$ est **une relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 1.

Exemple 2.

Exemple 3.

Exemple 4.

Exemple 5.

Définition 6 (Relation d'ordre). Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples : dans $\mathbb{R}$, la relation $\geq$ est une relation d'ordre mais pas $<$. Dans $\mathcal{P}(E)$, la relation d'inclusion est une relation d'ordre.

Définition 7 (Ordre total). Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre total si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$$

On peut comparer tous les éléments. Sinon l'ordre est partiel.

Exercice 3.1. Soient $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Déterminer les ensembles $A \times B$, $A \times (B \cup C)$ et $(A \times B) \cup (A \times C)$

Exercice 3.2. Déterminer si la relation $\mathcal{R}$ donnée par son graphe $\{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ dans $X = \{1, 2, 3\}$ est réflexive, symétrique, transitive.

Exercice 3.3. Soit $\mathcal{R}$ la relation notée $\cong$ et définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$(a, b) \cong (c, d) \quad \text{si} \quad ad = bc$$

Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 3.4. On considère la relation binaire $\models$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \models y$ si $(x - y) \in \mathbb{Z}$.

À-t-on $\frac{2}{3} \models \frac{4}{3}$? $\frac{2}{3} \models \frac{-4}{3}$?

Montrer que la relation $\models$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.5. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbb{N}^2, \quad (x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ si } (x \leq x' \text{ et } y \leq y').$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est-elle totale ou partielle ?

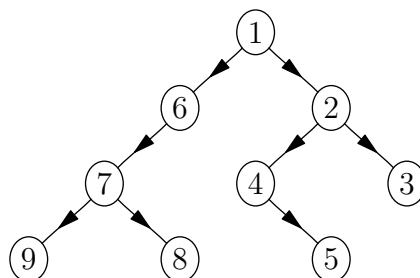
Exercice 3.6. Ordre lexicographique.

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbb{N}^2, \quad (x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ si } ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')).$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation antisymétrique.
3. On admet que $\mathcal{R}$ est transitive. La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est-elle partielle ou totale ?
4. La relation $\mathcal{R}$ permet de classer et de trier des chaînes de caractères à deux éléments ; elle correspond au début du classement alphabétique d'un dictionnaire. Proposer une définition étendant la relation $\mathcal{R}$ à $\mathbb{N}^3$.

Exercice 3.7. On donne le graphe suivant :



Sur l'ensemble des sommets $S = \{1, 2, \dots, 9\}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
 $\forall (x, y) \in S^2 \quad x\mathcal{R}y$ si $(x = y)$ ou (il existe un chemin de x à y ou de y à x dont tous les arcs sont « orientés à droite »).

Ainsi, par exemple, $2\mathcal{R}3$ et $8\mathcal{R}7$, mais $7\mathcal{R}4$ et $2\mathcal{R}4$.

L'objectif de cet exercice est de justifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

1. Compléter le tableau suivant :

Sommets x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sommets y tels que $x\mathcal{R}y$									

2. Quelle partie de la définition de $\mathcal{R}$ justifie que $\mathcal{R}$ est réflexive ?
3. La définition de la relation $\mathcal{R}$ où x et y sont interchangeables suffit à justifier que $\mathcal{R}$ est symétrique.

Démontrer que $\mathcal{R}$ est transitive, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y, z) \in S^3 \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

On pourra d'abord considérer le cas où $x = y = z$, puis le cas où $(x = y)$ ou $(y = z)$ ou $(z = x)$.

Dans le cas où les trois sommets x, y, z sont distincts, pour quels sommets du graphe $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z)$ est une proposition vraie ?

A-t-on alors $x\mathcal{R}z$?

Le graphe proposé est un cas particulier d'**arbre binaire**, c'est-à-dire d'une arborescence descendante dont le sommet initial unique est appelé **racine**, chaque sommet, ou **œud**, ayant au plus deux successeurs appelés **fil**s (fil droit et fil gauche), les sommets sans successeurs étant les feuilles.

En informatique, les **arbres binaires de recherche** sont des arbres binaires particuliers utilisés pour effectuer des tris : chaque nœud possède une clé, c'est-à-dire un nombre satisfaisant à des conditions distinguant son sous-arbre gauche et son sous-arbre droit.

Exercices supplémentaires

Exercice 3.8. Soit P l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$p\mathcal{R}q \quad \text{si} \quad \frac{p+q}{2} \in P$$

La relation est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

Exercice 3.9. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si} \quad x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Quelle est la classe d'équivalence¹ d'un élément x de $\mathbb{R}$? Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 3.10. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si} \quad x + y \text{ est pair}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Quelles sont les classes d'équivalences de cette relation ?

1. On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble des éléments liés à x , c'est-à-dire $\{y \mid x\mathcal{R}y\}$.

Exercice 3.11. Jeu de dés terriblement non transitifs².

Cinq dés cubiques à 6 faces sont équilibrés : chacune des faces a la même probabilité d'apparaître lors d'un lancer. Le dé rouge possède cinq faces marquées d'un 4 et une face d'un 9. Le dé bleu a trois faces 2 et trois faces 7. Le dé vert a cinq faces 5 et une face vierge. Le dé jaune a quatre faces 3 et deux faces 8. Le dé violet a deux faces 1 et quatre faces 6.

Montrer que : le rouge est plus fort que le bleu ; le bleu est plus fort que le vert ; le vert est plus fort que le jaune ; le jaune est plus fort que le violet ; le violet est plus fort que le rouge.

2. Roger MANSUY. « Jeu de dés terriblement non transitifs ». In : *La Recherche* 539 (sept. 2018). « Le dé A est plus fort que le dé B » signifie que la probabilité que le résultat du dé A soit supérieur à celui du dé B est strictement supérieure à $1/2$.