Chapitre 12

Probabilités 2

12.1 Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif. La loi exponentielle P de paramètre λ est définie :

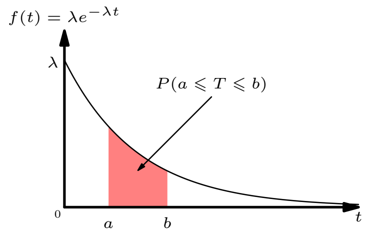
— pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans $[0;+\infty[$ par

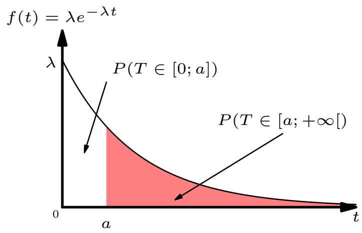
$$P([a;b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

— pour tout intervalle $[a;+\infty[$ inclus dans $[0;+\infty[$ par

$$P([a;+\infty[) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = e^{-\lambda a}$$

La fonction $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité.





Remarque 1. $P([0;+\infty[) = 1 - \int_0^0 \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = 1$

Remarque 2. Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure : le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.

Remarque 3. Cette loi permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique. Elle peut aussi être utilisée pour décrire le temps écoulé entre deux coups de téléphone reçus au bureau, ...

Si une variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ, son espérance est $E(T) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, soit $\boxed{E(T) = \frac{1}{\lambda}}$. Son écart-type est $\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Exemple : T donne la durée de fonctionnement (en heures) d'un composant. T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}002$.

Alors $E(T) = \frac{1}{0{,}002} = 500$ heures.

$$P(T \leqslant 300) = \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-0{,}002\times 300} \simeq 0{,}45$$

Utilisation de la calculatrice : programmes

Vocabulaire de la fiabilité

- $E(T)$ s'appelle le **M.T.B.F.** (Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement).
- $F(t) = P(T \leqslant t) = P([0;t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda t}$ est la probabilité d'avoir une défaillance avant l'instant t. F est la **fonction de défaillance** (Failure).
- Au contraire, $R(t) = P(T > t) = P([t;+\infty[) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = e^{-\lambda t}$ est la probabilité de ne pas avoir une défaillance avant l'instant t. R est la **fonction de fiabilité** (Reliability)

Exercice 12.1. On suppose que la durée, en minutes, pour le traitement du dossier d'un usager au guichet d'une administration suit une loi exponentielle de paramètre 0,1. On choisit au hasard un usager.

1. Quelle est la probabilité qu'il occupe le guichet plus de 15 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que son passage au guichet dure entre 5 et 25 minutes ?
3. Sachant qu'un usager est au guichet depuis 15 minutes, quelle est la probabilité que son passage dure plus d'une demi-heure ?

Exercice 12.2. Temps d'attente à un standard.

En appelant un service dépannage, on entend le message suivant : « votre temps d'attente est estimé à 3 minutes ». Sachant que le temps d'attente, en minutes, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle et que l'estimation annoncée correspond à l'espérance de T, déterminer la probabilité des événements suivants : $P(T = 3)$, $P(T \leqslant 2)$, $P(T > 1)$ et $P_{(T \geqslant 2)}(T > 3)$.

Exercice 12.3. Partie C de l'exercice 1 du BTS SIO métropole mai 2014

La variable aléatoire T donnant la durée de fonctionnement d'un disque A100, exprimée en mois avant la première défaillance, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Le service après-vente a pu établir que 30 % des disques A100 ont eu une défaillance avant la fin du 18$^{\text{e}}$ mois.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ et montrer que la valeur arrondie au centième de λ est égale à 0,02.

   Pour les questions suivantes, on prendra pour λ cette valeur 0,02.
2. Calculer la probabilité qu'un disque n'ait pas de défaillance au cours des 3 premières années.
3. Calculer la Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement (MTBF) de ces disques durs.

12.2 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui concerne le nombre de réalisations observées, durant un intervalle donné (intervalle de temps, ou de longueur, ou ...).

Elle intervient dans les phénomènes où le futur est indépendant du passé (pannes de machines, sinistres, mortalité, appels téléphoniques à un standard, files d'attente ...).

Si le nombre moyen de réalisations dans un intervalle fixé est λ, alors la probabilité que le nombre X de réalisations sur cet intervalle soit égal à k (k étant un entier naturel) est

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Exemple : pour $\lambda = 2$, $P(X = 4) = \dfrac{2^4}{4!}e^{-2} \simeq 0{,}0902$.

Cette formule n'est pas au programme du BTS : on demande seulement de savoir utiliser la calculatrice.

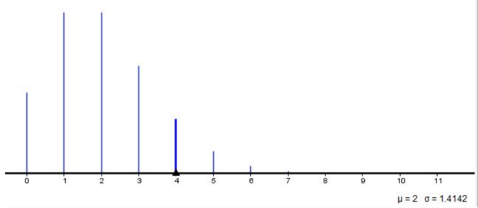
Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, son espérance est $\boxed{E(X) = \lambda}$, son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Exemple 1. Dans un central téléphonique, le nombre moyen d'appels en une heure est 20 et suit une loi de Poisson. La probabilité d'avoir 15 appels en une heure est donnée par la calculatrice : 0,052

(ici $\lambda = 20$)

Exemple 2. Dans un parking, l'arrivée des voitures est en moyenne de 120 par heure et suit une loi de Poisson . La probabilité de voir 4 voitures arriver en une minute est 0,0902.

En effet, le nombre moyen d'appels par minute (donc le paramètre λ) est $\dfrac{120}{60} = 2$.



k	P(X = k)
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.012
7	0.0034
8	0.0009
9	0.0002
10	0
11	0
12	0

Calculatrices : entrer le paramètre λ et le nombre de réalisations X.

- Casio graph 35+ : OPTN stat dist poisn pour poissonPD(4,2) ou mieux : accès par le menu stat.
- TI : 2nde distrib poissonFdp(2,4) pour $\lambda = 2$, $X = 4$ (ou poissPdf(2,4)) poissonFrep(2,4) donne le cumul $P(X \leqslant 4)$.

Sous certaines conditions (n assez grand et p petit), on approxime la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi de Poisson de même espérance (c'est-à-dire de paramètre $\lambda = np$).

La loi de Poisson est appelée **la loi des événements rares** car elle exprime une répartition binomiale pour un grand nombre d'expériences indépendantes et une probabilité infime de l'événement.

Exercice 12.4. BTS groupement A 2006, exercice 1 partie B.

Les appareils sont conditionnés par lots de 100 pour l'expédition aux distributeurs de pièces détachées. On prélève au hasard un échantillon de 100 appareils dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 appareils.

Pour cette partie, on considère que, à chaque prélèvement, la probabilité que l'appareil soit défectueux est 0,05.

On considère la variable aléatoire X_1 qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux.

1. (a) Justifier que la variable aléatoire X_1 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_1.
2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ.
   (a) On choisit $\lambda = 5$; justifier ce choix.
   (b) En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux appareils défectueux dans un lot.

Exercice 12.5. Une centrale téléphonique reçoit des appels à raison de 10 appels par heure en moyenne. On suppose que le nombre d'appels pendant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson.

1. Trouver la probabilité que durant deux minutes la centrale reçoive exactement trois appels.
2. Trouver la probabilité pour qu'en deux minutes, la centrale reçoive au moins un appel.
3. Trouver la probabilité pour qu'en deux minutes, la centrale reçoive au moins trois appels.

Exercice 12.6. Le fil d'un métier à tisser se casse en moyenne 0,375 fois par heure de fonctionnement du métier. Trouver la probabilité pour que durant huit heures de travail, le nombre X de cassures du fil se trouve entre 2 et 4 ($2 \leqslant X \leqslant 4$).

Exercice 12.7. La densité moyenne des microbes nocifs dans un mètre cube d'air est égale à 100. On prend un échantillon de 2 dm^3 d'air. Trouver la probabilité pour que dans ce volume il y ait au moins un microbe.

Exercice 12.8. Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré qu'il y avait 5% de bons de commmande comportant au moins une erreur. On constitue au hasard un échantillon de 100 bons de commande parmi ceux traités un jour donné.

Le nombre de bons de commande traités dans cette journée est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bons de commande. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 100 bons le nombre de bons erronés. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 5.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

— E_1 : « il y a exactement 5 bons erronés parmi les 100 » ;
— E_2 : « il y a au plus 5 bons erronés parmi les 100 » ;
— E_1 : « il y a plus de 5 bons erronés parmi les 100 » ;

Exercice 12.9. Dans cet exercice, les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en plastique de longueur théorique 100 mm. Dans un lot de ce type de tiges, 2% des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme de ce prélèvement.

1. Pour cette question on prend $n = 50$.
   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Calculer $P(X = 3)$.
2. Pour cette question, on prend $n = 100$. La variable aléatoire X suit une loi binomiale que l'on décide d'approcher par une loi de Poisson.
   (a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   (b) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est la paramètre obtenu à la question 2(a). À l'aide de l'approximation de X par Y, calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges de longueur non conforme.