# Chapitre 10

# Calcul intégral

## 10.1 Introduction

$f$ est une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a;b]$. On s'intéresse dans ce chapitre à l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan $\mathscr{D}$ délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

En divisant l'intervalle $[a;b]$ en $n$ intervalles, on obtient l'encadrement : $s_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant S_n$, où $s_n$ est la somme des aires des rectangles situés sous $\mathscr{C}_f$ et $S_n$ est la somme des aires des rectangles situés au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

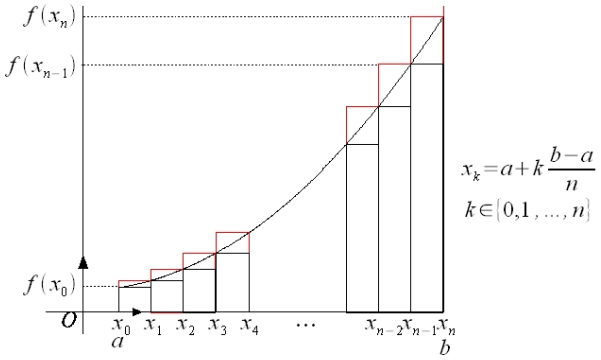



FIGURE 10.1 – Encadrement d'une aire par deux suites adjacentes

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} \quad ; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

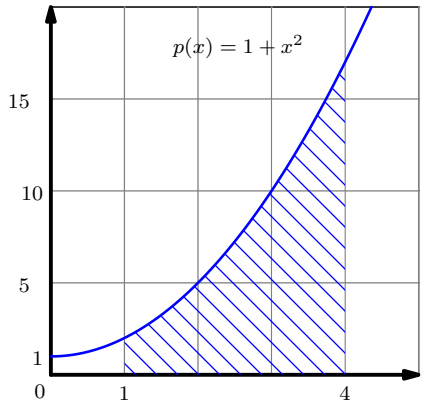
On peut montrer que les suites $(s_n)$ et $(S_n)$ sont adjacentes (c'est-à-dire que $(s_n)$ croît, $(S_n)$ décroît et $\lim(S_n - s_n) = 0$) et que leur limite commune est $\mathscr{A}$.

Quand $n \to +\infty$, la largeur $\frac{b-a}{n}$ des rectangles devient infiniment petite et est notée $\mathrm{d}x$. On note

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Le symbole $\int$ signifie encore « somme ». $f(x)\mathrm{d}x$ peut être vu comme l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$, de largeur $\mathrm{d}x$.

Exemple en Python, pour $f(x) = 1 + x^2$, entre 1 et 4 :



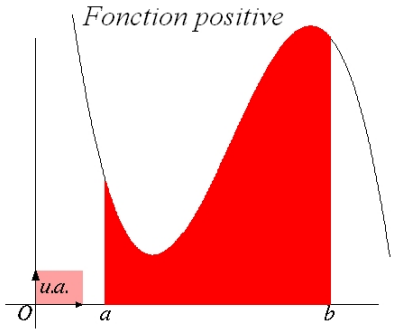

```
def rectangle_inf(f,a,b,n):
    # donne une valeur approchee inferieure de l aire situee
    # sous la courbe de f positive entre a et b
    # c'est l aire des n rectangles situes sous la courbe
    s = 0
    delta = (b-a)/n  #largeur d un rectangle
    for k in range(n):
        s = s + delta * f(a+k*delta)
    return s

def rectangle_sup(f,a,b,n):
    # donne une valeur approchee superieure de l aire situee
    # sous la courbe de f positive entre a et b
    # c'est l aire des n rectangles situes au dessus de la courbe
    S = 0
    delta = (b-a)/n  #largeur d un rectangle
    for k in range(n):
        S = S + delta * f(a+(k+1)*delta)
    return S


def p(x):
    return    1 + x**2

print(rectangle_inf(p,1,4,500))
print(rectangle_sup(p,1,4,500))
```

Affichage obtenu ;

23.955018000000006
24.045018000000001

## 10.2 Aire sous la courbe d'une fonction, intégrale

Si $f$ est un fonction **continue et positive** sur $[a;b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine colorié, mesurée en unités d'aires.




**Aire entre deux courbes**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$, $a < b$. Si pour tout $x$ de $[a;b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors l'aire située entre les courbes de $f$ et $g$ sur $[a;b]$ est (en unité d'aires) :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

(quels que soient leurs signes)

Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$, alors pour tous réels $a$ et $b$ dans $I$, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

où $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ (c'est-à-dire : $F' = f$).

Exemple : $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$.

Calculons l'intégrale $J = \int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Une primitive de $f$ est $F$ définie par

$$F(x) = x^3 - x^2 + 3x$$

$$J = F(1) - F(-2) = -1 - (-22) = 21$$

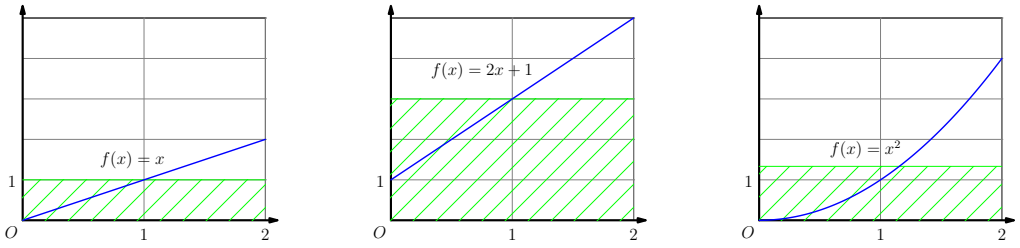
## 10.3 Valeur moyenne d'une fonction

$f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a;b]$ le nombre :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemples :

- la valeur moyenne sur $[0\,;2]$ de $x \mapsto x$ est $\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 1.$
- Celle de $x \mapsto 2x+1$ est $\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2 (2x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(2^2 + 2 - (0^2+0)\right) = 3$
- Celle de $x \mapsto x^2$ est $\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{4}{3}$




Interprétation graphique (figure 10.2) : l'aire délimitée par la courbe de $f$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de longueur $b - a$ et de hauteur la valeur moyenne.

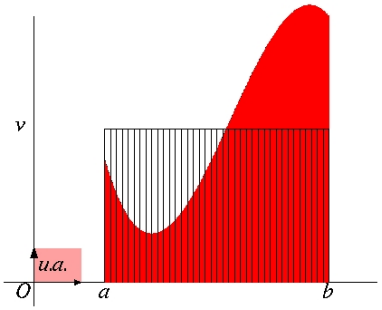



FIGURE 10.2 – Valeur moyenne d'une fonction positive

## 10.4 Primitives

### 10.4.1 Primitives des fonctions usuelles

On les détermine par la lecture inverse du tableau de dérivées.

Exemples :

— Une primitive de $x \mapsto 5$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 5x + 3$.

— Une primitive de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$.

— Une primitive de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}$.

— Une primitive de $x \mapsto x + x^5$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^6$.

### 10.4.2 Primitives des fonctions moins usuelles (supplément)

On tente de reconnaître des dérivées connues : $nu'u^{n-1}$, $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u'e^u$....

1. (gentil) La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 6x(x^2+7)^2$$
est un polynôme, donc est continue (ce sera prouvé plus loin), donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $nu'u^{n-1}$ :
$$f(x) = \underbrace{3}_{n} \times \underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{(x^2+7)^2}_{(u(x))^{n-1}}$$
Une primitive de $f$ est donc $F$ :
$$F(x) = \underbrace{(x^2+7)^3}_{(u(x))^n}$$

2. (moins gentil) La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (x+2)(x^2+4x)^5$$
est un polynôme, donc est continue, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $nu'u^{n-1}$ (si !) :
$$f(x) = \underbrace{6}_{n} \times \underbrace{(2x+4)}_{u'(x)} \underbrace{(x^2+4x)^5}_{(u(x))^{n-1}} \times \frac{1}{12}$$
C'est bien la fonction de l'énoncé :
$$\frac{1}{12} \times 6(2x+4) = \frac{1}{12} \times 6 \times 2(x+2) = (x+2)$$
Une primitive de $f$ est donc $F$ :
$$F(x) = \frac{1}{12} \underbrace{(x^2+4x)^6}_{(u(x))^n}$$

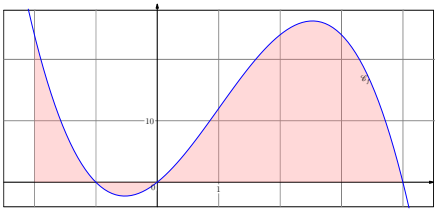
3. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(3x^2+4)^3}$$
est un quotient de polynômes, donc est continue, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $nu'u^{n-1}$ ( ...) :
$$f(x) = \underbrace{-2}_{n} \times \underbrace{(6x)}_{u'(x)} \underbrace{(3x^2+4)^{-3}}_{(u(x))^{n-1}} \times \frac{-1}{12}$$
NB : $n-1 = -3$ donne $n = -2$.
Une primitive de $f$ est donc $F$ :
$$F(x) = -\frac{1}{12} \underbrace{(3x^2+4)^{-2}}_{(u(x))^n} = -\frac{1}{12(3x^2+4)^2}$$

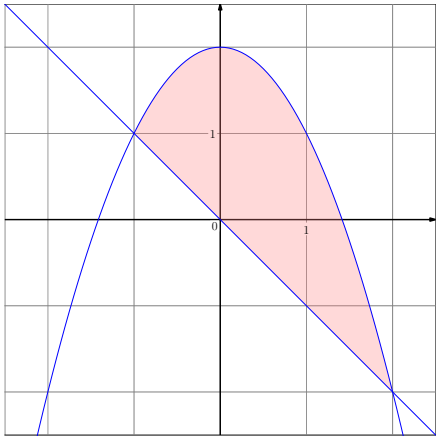
**Exercice 10.1.** $f$ est la fonction affine par morceaux définie sur $[-4;4]$ par

$$\begin{cases} f(x) = x+5 & \text{pour } x \in [-4;-1] \\ f(x) = -x+3 & \text{pour } x \in [-1;1] \\ f(x) = 2 & \text{pour } x \in [1;4] \end{cases}$$

Calculer $\int_{-4}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$. En déduire $\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

**Exercice 10.2.** On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = -2x^3+6x^2+8x$. Calculer, en unités d'aires, l'aire de la surface colorée.





**Exercice 10.3.** On a représenté la courbe d'équation $y = 2-x^2$ et la droite d'équation $y = -x$. Calculer, en unités d'aires, l'aire de la surface colorée.

**Exercice 10.4.** Un logiciel de calcul formel affiche :

```
f(x) :=ln(x)
                (x)->ln(x)
integrate(f(x),x)
                xln(x)-x
integrate(f(x),x,1,100)
                100ln(100)-100+1
```

En déduire la valeur moyenne de la fonction ln entre 1 et 100.

**Exercice 10.5.** Trouversur $\mathbb{R}$ une primitive $F$ de la fonction $f$ dans les cas suivants :
$f : x \mapsto x^3+3$
$f : x \mapsto x^4+x^2-x$
$f : x \mapsto x^3+7x^2-5x+1$
$f : x \mapsto ax^2+bx+c$
$f : x \mapsto x^2+x+\dfrac{1}{3x^2}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

**Exercice 10.6.** (supplément) Déterminer sur $\mathbb{R}$ les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x+3)^3 \qquad g(x) = 2(2x-1)^2$$
$$h(x) = (x+1)(0{,}5x^2+x)^4 \qquad i(x) = 2(x+2)^4$$
$$j(x) = 6(3x^2+1)(x^3+x-4)^5$$

**Exercice 10.7.** (supplément) Trouver une primitive de $f$ sur un intervalle I que l'on précisera.

$$f(x) = x(x^2+5)^4 \qquad f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}$$
$$f(x) = (\frac{1}{x}+x)^7(\frac{1}{x^2}-1) \qquad f(x) = \frac{x}{x^2-1} \qquad f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$$