Chapitre 1

Arithmétique

Écriture en binaire des nombres décimaux

En base deux (en binaire), on utilise deux chiffres (0 et 1).

$$\begin{aligned} 1101_b &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

1101_b (ou 1101_2 ou ...) correspond au nombre décimal 13.

Exposants négatifs : en utilisant $2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = 0{,}25$, ..., on peut représenter les nombres décimaux.

$$\begin{aligned} 10{,}011_b &= 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 1 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}125 \\ &= 2{,}375 \end{aligned}$$

Problème du passage d'un nombre décimal à sa représentation en binaire.

Pour la partie décimale :

- on multiplie par 2 les parties décimales ; si on obtient 1 ou la précision souhaitée, on arrête ;
- les parties entières des produits forment la suite des décimales.

Ensuite, tout dépend du nombre de bits dont on dispose.

Exemple 1. $0{,}375 \times 2 = 0{,}75$
$0{,}75 \times 2 = 1{,}5$
$0{,}5 \times 2 = 1$
Ainsi $20{,}375 = (10100{,}011)_2$

Exemple 2. $0{,}2 = (0{,}0011)_2$ arrondi en binaire à 4 bits après la virgule car :
$0{,}2 \times 2 = 0{,}4$
$0{,}4 \times 2 = 0{,}8$
$0{,}8 \times 2 = 1{,}6$
$0{,}6 \times 2 = 1{,}2$

NB : en binaire sur 4 bits, la représentation de 0,2 est la même que celle de 0,1875 . D'où des problèmes à prévoir dans les tests d'égalité , ou des surprises quand on calcule dans une console Python $0{,}1 + 0{,}2$:

```
In [1]: 0.1+0.2
Out[1]: 0.30000000000000004
```

Arithmétique. Révisions

Exercice 1.1. Convertir 2017 en base 2, $(11011)_b$ en base 10, 127 en base 16, $(ABC)_h$ en base 2, $(1FC0)_h$ en base 10, $(11100111)_b$ en base 16.

Exercice 1.2. Effectuer les opérations suivantes (pour justifier, montrer par exemple l'opération posée et les retenues éventuelles, ou ...) :

$$(1010101)_b + (11111)_b$$
$$(CF4D5)_h + (12E)_h$$
$$(11010)_b \times (100)_b$$

Exercice 1.3 (Écriture en binaire des nombres décimaux. BTS SIO 2017)**.** .

1. Cette question est une question à choix multiple. Une seule réponse est exacte. On ne demande pas de justification.

   La représentation binaire du nombre qui s'écrit en décimal $15{,}5_{10}$ est :

Réponse A	: $10101{,}101_2$	**Réponse B**	: $1111{,}1_2$
Réponse C	: $1111{,}0101_2$	**Réponse D**	: $10101{,}1_2$

2. Justifier que le nombre décimal $15{,}625_{10}$ a pour représentation binaire $1111{,}101_2$.

Exercice 1.4. Convertir en binaire : 1,75 ; 12,625 ; 2,3125 ; 5,333 ; 20,4 ; 2017,2017.

Exercice 1.5. (a) 2017 est-il premier ?

(b) 312 et 125 sont-ils premiers entre eux ?

(c) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 525 par 12.

(d) Déterminer $PGCD(18; 108)$ et $PGCD(525; 425)$.

Exercice 1.6. Écrire la décomposition en facteurs premiers de 1150 ; 1360.

Exercice 1.7. Donner la liste des diviseurs de 1617 et 5915.

Exercice 1.8. Écrire la décomposition en facteurs premiers de 22 869. Quel est le plus petit entier naturel par lequel il faut multiplier 22 869 pour obtenir le carré d'un entier naturel ?

Exercice 1.9. Pour tout entier naturel n, on pose : $A_n = n^2 + n + 17$.

1. Vérifier que, pour tout n de 0 à 15, A_n est un nombre premier.
2. Montrer que A_{16} n'est pas premier.

Exercice 1.10. Que signifie : « les entiers a et b sont premiers entre eux » ?

Donner des exemples de nombres premiers entre eux et de nombres pas premiers entre eux.

Exercice 1.11. 1. Compléter par l'entier le plus petit possible : $90 \equiv \ldots \quad [7]$ et $66 \equiv \ldots \quad [7]$.

2. En utilisant les propriétés des congruences et sans calculatrice, compléter les résultats suivants en mettant l'entier le plus petit possible :

$$90 + 66 \equiv \ldots \quad [7] \qquad 4 \times 90 \equiv \ldots \quad [7] \qquad 90 \times 66 \equiv \ldots \quad [7]$$

$$90^2 \equiv \ldots \quad [7] \qquad 66^3 \equiv \ldots \quad [7]$$

Exercice 1.12. 1. Faire les divisions euclidiennes de 200 et 900 par 13 et traduire les résultats en congruences.

2. En utilisant les propriétés des congruences, compléter les résultats suivants en mettant l'entier le plus petit possible :

$$200 + 900 \equiv \dots \quad [13] \qquad 200 \times 900 \equiv \dots \quad [13]$$

$$200^2 \equiv \dots \quad [13] \qquad 900^3 \equiv \dots \quad [13]$$

3. Quel est le reste de la division euclidienne de $200^4 + 900^6$ par 13 ?

Exercice 1.13. 1. Montrer que $1789 \equiv 4 \quad [7]$. Compléter la congruence suivante : $1789^3 \equiv \dots \quad [7]$

2. Montrer que $1789^{1789} = (1789^3)^{596} \times 1789$.

3. Compléter $1789^{1789} \equiv \dots \quad [7]$. Exprimer de résultat avec une phrase évoquant la division euclidienne.

Exercices supplémentaires

Exercice 1.14. Quel est le plus petit entier positif divisible par 75 qui a exactement 75 diviseurs positifs ? [1]

Exercice 1.15. Quels sont les nombres supérieurs à 10 et inférieurs à 1 000 000 qui sont premiers et dont tous les chiffres sont égaux ? [2]

Exercice 1.16. Considérons 20 nombres entiers consécutifs supérieurs à 50. Quelle est la quantité maximale de nombres premiers dans cet ensemble ? [3]

Exercice 1.17. Trouver le plus petit entier positif tel que le produit de ses chiffres soit égal à 18 900. [4]

Exercice 1.18. Les entiers 22, 23 et 24 ont la propriété que tous les exposants qui apparaissent dans leurs décompositions en produits de facteurs premiers sont impairs, puisque $22 = 2^1 \times 11^1$, $23 = 23^1$ et $24 = 2^3 \times 3^1$. Quelle est la longueur maximale d'une suite d'entiers consécutifs ayant cette propriété ? [5]

Exercice 1.19. Soient des objets en nombre inconnu. Si on les range par 3 il en reste 2. Si on les range par 5, il en reste 3 et si on les range par 7, il en reste 2. Combien a-t-on d'objets ?

1. Collectif. *Calendrier mathématique 2023*. Presses Universitaires de Grenoble, 2023
2. Ibid.
3. Ibid.
4. Ibid.
5. Ibid.