BTS BLANC
SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Épreuve obligatoire

28 novembre 2022

SUJET

Durée : 2 heures **coefficient : 2**

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Ce document comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Dès que ce document vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Exercice 1 (5 points)

Une entreprise fabrique des manettes pour consoles de jeux vidéo. Elle en propose de deux tailles différentes : grandes ou bien petites ; qui sont de couleur soit noire, soit argentée pour chaque taille ; et qui sont sans fil ou bien à brancher pour chaque taille également.

On introduit les variables booléennes suivantes :

- g signifie que la manette est grande, $\overline{g}$ que la manette est petite ;
- n signifie que la manette est de couleur noire, $\overline{n}$ que la manette est de couleur argentée ;
- b signifie que la manette est à brancher, $\overline{b}$ que la manette est sans fil.

Cette entreprise fournit plusieurs fabricants qui lui en achètent des quantités analogues.

Après plusieurs mois de vente, l'entreprise constate que les manettes vendues sont de l'un au moins des 4 types suivants :

- les grandes manettes sans fil ;
- les petites manettes de couleur noire ;
- les petites manettes de couleur argentée et sans fil ;
- les petites manettes qui sont à brancher.

On note E l'expression booléenne correspondant aux types de manettes les plus vendues par l'entreprise.

On admet que $E = g.\overline{b} + \overline{g}.n + \overline{g}.\overline{n}.\overline{b} + \overline{g}.b$.

1. Traduire par une phrase l'expression booléenne $\overline{g}.b$.
2. Représenter E par un tableau de Karnaugh, puis déterminer une forme simplifiée, à deux termes, de l'expression booléenne E.
3. Traduire par une phrase l'expression simplifiée E.
4. L'entreprise souhaite réduire sa production en supprimant les types de manettes non vendues. Lesquelles doit-elle supprimer ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (8 points)

Dans le modèle RGB (Red, Green, Blue), datant de 1931, la couleur et l'intensité de la lumière peuvent être représentées par la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$, où R représente l'intensité de la composante rouge, G l'intensité de la composante verte et B l'intensité de la composante bleue.

L'intensité de chaque composante est, dans le système décimal, un entier compris entre 0 et 255 : 0 désigne l'absence de celle-ci et 255 désigne l'intensité maximale de celle-ci.

Partie A - Codage de couleurs

La couleur ≪ saumon ≫ est codée par $\begin{pmatrix} 248 \\ 142 \\ 85 \end{pmatrix}$ en décimal ; l'intensité du rouge est donc 248, celle du vert est 142 et celle du bleu est 85.

Dans certains logiciels comme Photoshop par exemple, les couleurs sont codées par 3 nombres hexadécimaux à deux chiffres représentant les valeurs de Rouge, Vert et Bleu. En hexadécimal, cette couleur ≪ saumon ≫ est codée $(F8\ ;\ 8E\ ;\ 55)$ que l'on notera par la matrice $\begin{pmatrix} F8 \\ 8E \\ 55 \end{pmatrix}$.

1. La couleur ≪ vert tilleul ≫ est codée en écriture décimale par $\begin{pmatrix} 165 \\ 209 \\ 82 \end{pmatrix}$.

   Déterminer son codage en hexadécimal ; on détaillera la démarche pour la valeur 165.

2. La couleur ≪ mauve ≫ est codée en hexadécimal par $\begin{pmatrix} D4 \\ 73 \\ D4 \end{pmatrix}$.

   Déterminer son codage en écriture décimale ; on détaillera la démarche pour la valeur $D4$.

3. Combien de couleurs différentes peut-on représenter avec ce mode de représentation ? Combien de bits utilise ce codage ?

Partie B - De la lumière vers l'œil.

La rétine d'un œil humain est composée de deux types de récepteurs : les cônes et les bâtonnets. Les bâtonnets sont responsables de la vision à faible niveau d'énergie (vision nocturne dite ≪ scotopique ≫ et vision à niveaux de gris) et ne perçoivent pas les couleurs.

Ils mesurent l'intensité de la lumière visible. Les cônes sont responsables de la vision diurne colorée. La vision des couleurs n'est pas toutefois directe, elle est envoyée au cerveau au moyen d'un signal $S = \begin{pmatrix} i \\ l \\ c \end{pmatrix}$.

- L'intensité i de la lumière est $i = \frac{1}{3}(R + G + B)$;
- L'intensité l des ondes longues est $l = R - G$;
- L'intensité c des ondes courtes est $c = B - \frac{R + G}{2}$.

Par exemple, pour la couleur « vert tilleul » codée en décimal par $\begin{pmatrix}165\\209\\82\end{pmatrix}$, l'intensité i de la lumière est $i = \dfrac{1}{3}(165+209+82) = 152$; l'intensité l des ondes longues est $l = 165 - 209 = -44$ et l'intensité c des ondes courtes est $c = 82 - \dfrac{165+209}{2} = -105$.

On note les matrices : $C = \begin{pmatrix}R\\G\\B\end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & -1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

1. (a) Donner une égalité reliant les matrices S, C et M.
   (b) Calculer les différentes intensités i, l et c du signal lorsque $R = 150$, $G = 90$ et $B = 210$.
2. Soit N la matrice définie par : $N = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit $N \times M$.
   (b) Que peut-on en déduire pour les matrices N et M ?
3. (a) Prouver que si $M \times C = S$ alors $C = N \times S$.
   (b) Le cerveau reçoit comme signal : $i = 120$; $l = 100$ et $c = -90$.
   Quelles sont les intensités R, G et B de la lumière reçue par l'œil ?

Exercice 3 (7 points)

1. On note A l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 10 : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   On considère la relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble A définie ainsi :

   $$\forall a \in A,\ \forall b \in A, \qquad a\mathscr{R}b \quad \text{si} \quad a \text{ divise } b.$$

   Par exemple, $2\mathscr{R}6$ (car 2 divise 6) et $1\mathscr{R}1$ (car 1 divise 1).
   (a) Donner le graphe de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (a, b) tels que $a\mathscr{R}b$.
   (b) La relation binaire $\mathscr{R}$ est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ? Justifier bien sûr les réponses.
   (c) $\mathscr{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?
   (d) $\mathscr{R}$ est-elle une relation d'ordre ? Si oui, l'ordre est-il partiel ou total ?
2. On se place à présent dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
   x et y étant des entiers naturels, on dit que y est un successeur immédiat de x si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
   - x divise y ;
   - $x \neq y$
   - non($\exists z \in \mathbb{N}$; $(z \neq x)$ et (x divise z) et (z divise y)).

   Par exemple, 6 est un successeur immédiat de 3 ; 9 et 15 sont aussi des successeurs immédiats de 3. Mais pas 12 (car 3 divise 6 et 6 divise 12).
   Donner la liste des 5 premiers successeurs immédiats de 2.