BTS BLANC

SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

Épreuve EF2
MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

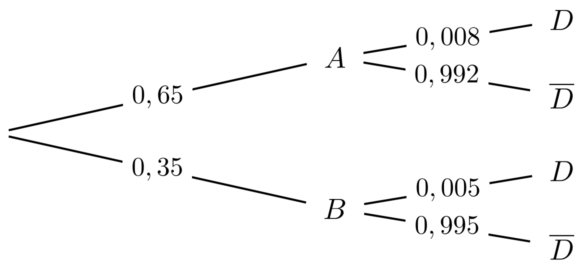
15 mars 2023

CORRIGÉ

Exercice 1 (10 points)

Partie A

1. Arbre pondéré :



2. (a) La probabilité de l'évènement $A \cap D$ est :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,65 \times 0,008 = \boxed{0{,}005\,2}$$

La probabilité que la carte ait été produite par l'usine A $\boxed{\text{et}}$ soit défectueuse est égale à 0,005 2 $(0,52\%)$.

(b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= 0{,}005\,2 + 0,35 \times 0,005 \\ P(D) &= 0{,}006\,95 \end{aligned}$$

Le pourcentage de cartes défectueuses dans la production totale est $0,695\,\%$.

3. Une carte défectueuse a été prélevée au hasard dans le lot. La probabilité qu'elle ait été produite par l'usine A est :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}005\,2}{0{,}006\,95} \approx \boxed{0,748}$$

Partie B

1. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise, donc on répète 30 tirages de manière indépendante.
   La variable aléatoire X qui dénombre les cartes défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,007$.

2. (a) La probabilité qu'aucune carte prélevée ne soit défectueuse est :

$$P(X = 0) = (1 - 0,007)^{30} \approx \boxed{0,81}$$

(b) La probabilité qu'au moins une carte prélevée présente un défaut dans le lot choisi au hasard est :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,81 \approx \boxed{0,19}$$

Partie C

1. La probabilité que le débit de la carte choisie soit compris entre 1 317 et 1 383 Mo/s est : $P(1\,317 \leqslant Y \leqslant 1\,383) \approx \boxed{0,683}$.

2. Pour déterminer la plus grande valeur de l'entier k tel que $P(Y > k) \geqslant 0,95$, on tâtonne avec la calculatrice.
   On trouve : $P(Y > 1\,296) \approx 0,949 < 0,95$ et $P(Y > 1\,295) \approx 0,952 \geqslant 0,95$
   Donc la plus grande valeur de l'entier k tel que $P(Y > k) \geqslant 0,95$ est $\boxed{k = 1\,295}$.

Exercice 2 (10 points)

Sur l'intervalle $[0;18]$

$$f(x) = 5 + (x+1)e^{-0,2x}.$$

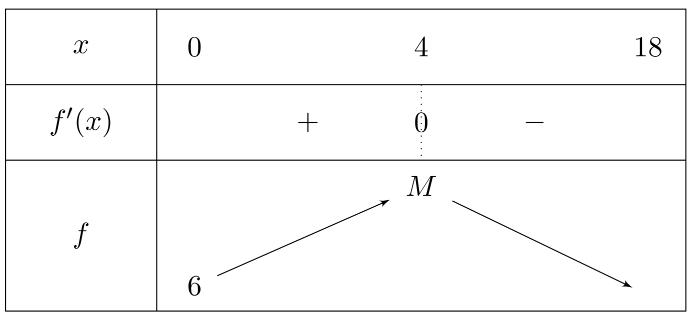
Partie A - Étude de la fonction f

1. Tableau de valeurs (arrondies au centième).

x	0	2	6	12	18
$f(x)$	6	7,01	7,11	6,18	5,52

2. Pour tout réel x : $f'(x) = 0,2(-x+4)e^{-0,2x}$.
   - $0,2 > 0$;
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,2x} > 0$;
   - donc $f'(x)$ est du signe de la fonction affine $x \mapsto -x+4$, qui est positive avant 4 et négative après.

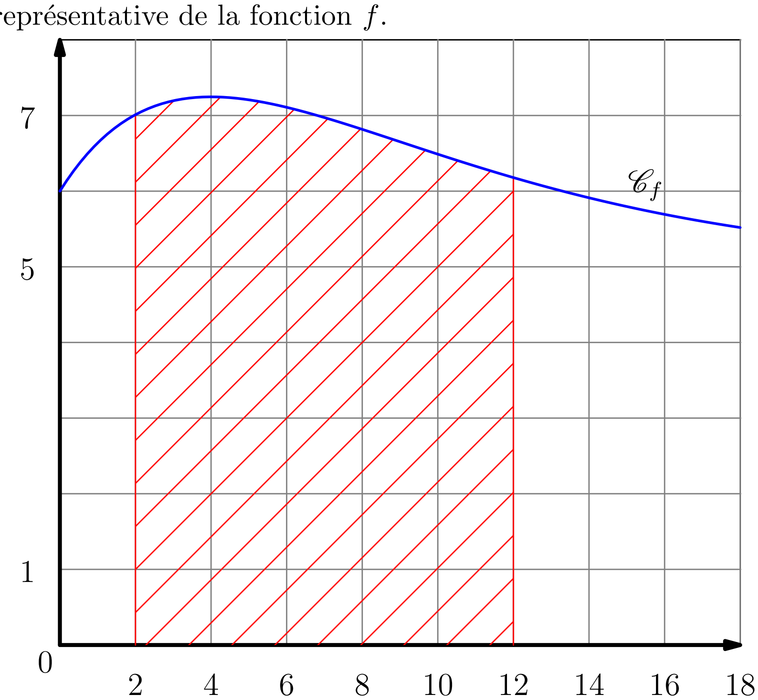
   Tableau de variations :



   La valeur arrondie au centième du maximum de la fonction f sur $[0;18]$ est

$$M = f(4) \approx 7,25.$$

3. (a) Courbe représentative de la fonction f.



(b) Hachures de la zone d'aire $I = \displaystyle\int_2^{12} f(x)\mathrm{d}x$.

4. Une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0;18]$ est donnée par :

$$F(x) = 5x - (5x+30)e^{-0{,}2x}.$$

(a) La valeur exacte de l'intégrale I est

$$I = \int_2^{12} f(x)\mathrm{d}x$$
$$I = F(12) - F(2)$$
$$I = 5\times 12 - (5\times 12+30)e^{-0{,}2\times 12} - \left(5\times 2 - (5\times 2+30)e^{-0{,}2\times 2}\right)$$
$$I = 60 - 90e^{-2{,}4} - 10 + 40e^{-0{,}4}$$
$$\boxed{I = 50 - 90e^{-2{,}4} + 40e^{-0{,}4}}$$

(b) La valeur moyenne m, arrondie au centième, de la fonction f sur l'intervalle $[2;12]$ est

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{12-2}I \\ &= \frac{1}{10}\left(50 - 90e^{-2{,}4} + 40e^{-0{,}4}\right) \\ &\approx \boxed{6,86} \end{aligned}$$

Partie B - Interprétations

1. En décembre 2019, $x = 12$. On a vu que $f(12) \approx 6,18$. Donc le nombre de composants qui seront produits lors du mois de décembre 2019 peut être estimé à $\boxed{6\,180}$.
2. f est maximale pour $x = 4$ donc en $\boxed{\text{avril 2019}}$. Ce mois-là, le nombre de composants produits durant ce mois est $\boxed{7\,250}$.
3. Entre le mois de février 2019 ($x = 2$) et le mois de décembre 2019 ($x = 12$), une estimation du nombre moyen mensuel de composants produits est $1000m$, soit $\boxed{6\,860}$.