

BTS BLANC

SERVICES INFORMATIQUES

AUX ORGANISATIONS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

15 mars 2023

SUJET pour les ALTERNANTS

Durée : 2 heures

Seuls les points supérieurs à 10 sont pris en compte.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Ce document comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Dès que ce document vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Exercice 1 (10 points)

Le directeur d'une entreprise fabriquant des cartes mères souhaite optimiser la production mensuelle. Il possède deux sites distincts notés A et B.

Le site A produit 65 % des cartes mères, le reste provient du site B.

Il a constaté que 0,8 % des cartes produites par A sont défectueuses alors que, sur le site B, la part des cartes défectueuses est de 0,5 %.

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

On prélève au hasard une carte mère à la sortie de la chaîne de production. On considère les événements suivants :

- A : « la carte a été produite par l'usine A. »
- B : « La carte a été produite par l'usine B. »
- D : « La carte est défectueuse. »

On rappelle que, quel que soit l'évènement E , on note $\bar{E}$ son évènement contraire.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré en respectant les notations données ci-dessus.
2. (a) Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap D$ et donner une interprétation du résultat trouvé.
(b) Montrer que $P(D) = 0,00695$ et donner une interprétation du résultat trouvé.
3. Une carte défectueuse a été prélevée au hasard dans le lot.
Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par l'usine A ? On arrondira le résultat au millième.

Partie B

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

On considère dans cette partie que la probabilité qu'une carte soit défectueuse est égale à 0,007.

Les cartes produites par la start-up sont vendues par lots de 30. Avant expédition, on prélève au hasard un lot de 30 cartes pour vérifier leur bon fonctionnement. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, pour un lot de 30 cartes prélevées, dénombre celles qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. (a) Calculer la probabilité qu'aucune carte prélevée ne soit défectueuse.
(b) En déduire la probabilité qu'au moins une carte prélevée présente un défaut dans le lot choisi au hasard.

Partie C

Dans cette partie, l'équipe de production du site A souhaite étudier le débit du bus FSB des cartes mères qu'elle produit.

On note Y la variable aléatoire qui modélise ce débit en Mo/s (mégaoctet par seconde).

On admet que Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 1\,350$ et d'écart-type $\sigma = 33$.

On prélève au hasard une carte mère à la sortie de la chaîne de production.

1. Déterminer la probabilité que le débit de la carte choisie soit compris entre 1 317 et 1 383 Mo/s. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
2. Déterminer la plus grande valeur de l'entier k tel que $P(Y > k) \geq 0,95$.

Exercice 2 (10 points)

Une entreprise informatique produit à partir du 1^{er} décembre 2018 un nouveau type de composants, et prévoit de poursuivre cette production pendant 18 mois.

On note x le rang du mois écoulé depuis décembre 2018. Ainsi, $x = 0$ en décembre 2018, $x = 1$ en janvier 2019, $x = 18$ en juin 2020.

On admet que le nombre de composants produits, en milliers, au cours du mois de rang x , est modélisé par la fonction f , définie sur l'intervalle $[0; 18]$ par :

$$f(x) = 5 + (x + 1)e^{-0,2x}.$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant ces valeurs au centième.

x	0	2	6	12	18
$f(x)$	6				

2. Un logiciel de calcul formel donne, pour tout réel x : $f'(x) = 0,2(-x + 4)e^{-0,2x}$.
Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 18]$ et dresser son tableau de variations. On calculera la valeur arrondie au centième du maximum de la fonction f sur l'intervalle considéré.
3. (a) Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
(b) Hachurer, sur ce graphique, l'aire correspondant à l'intégrale $I = \int_2^{12} f(x)dx$.
4. On a obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0; 18]$. Celle-ci s'exprime, pour tout réel x , par :

$$F(x) = 5x - (5x + 30)e^{-0,2x}.$$

- (a) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_2^{12} f(x)dx$.
- (b) En déduire la valeur moyenne, arrondie au centième, de la fonction f sur l'intervalle $[2; 12]$.

Partie B - Interprétations

1. Donner une estimation du nombre de composants qui seront produits lors du mois de décembre 2019.
2. Déterminer le mois durant lequel la production est maximale, et donner le nombre de composants produits durant ce mois.
3. Donner une estimation du nombre moyen mensuel de composants produits, entre le mois de février 2019 et le mois de décembre 2019.