BTS BLANC

SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

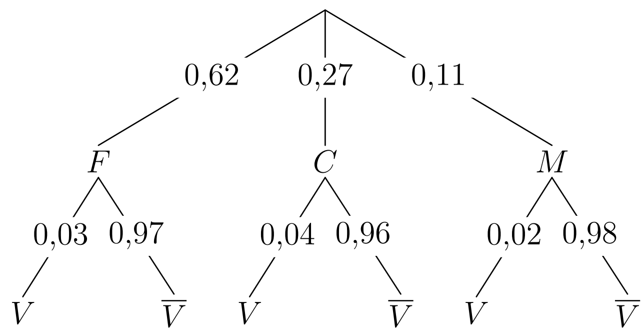
22 novembre 2023

CORRIGÉ

Exercice 1 (10 points)

Partie A : Probabilités conditionnelles

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) La probabilité que la noix soit de la variété « Franquette » et qu'elle soit vide est :

$$\begin{aligned} P\left(F \cap V\right) &= P(F) \times P_F(V) \\ &= 0{,}62 \times 0{,}03 \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(F \cap V\right) = 0{,}0186}$$

   (b)

$$\begin{aligned} P\left(F \cap \overline{V}\right) &= P(F) \times P_F\left(\overline{V}\right) \\ &= 0{,}62 \times 0{,}97 \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(F \cap \overline{V}\right) = 0{,}6014}$$

   C'est la probabilité que la noix soit de la variété « Franquette » et qu'elle ne soit pas vide.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(F \cap V) + P(C \cap V) + P(M \cap V) \\ &= 0{,}0186 + 0{,}27 \times 0{,}04 + 0{,}11 \times 0{,}02 \\ P(V) &= 0{,}0316 \end{aligned}$$

4. On suppose que la noix choisie n'est pas vide.
   L'arrondi à 0,001 de la probabilité qu'elle soit de la variété « Corne » est :

$$\begin{aligned} P_{\overline{V}}(C) &= \frac{P\left(C \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} \\ &= \frac{0{,}27 \times 0{,}96}{1 - 0{,}0316} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\overline{V}}(C) \approx 0{,}268}$$

Partie B : Loi binomiale

1. On répète 100 fois, de manière identique et indépendante, l'expérience de Bernoulli à deux issues : « la noix est vide ou pas ». La variable aléatoire X égale au nombre de noix vides, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}03$.
2. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 100 \times 0{,}03 = 3$.
   On peut estimer que sur un lot de 100 noix, il y en a en moyenne 3 qui sont vides.
3. $P(X = 0) = 0{,}97^{100} \approx \boxed{0{,}048}$
   C'est la probabilité que le lot ne contienne aucune noix vide.
4. D'après la calculatrice $P(X \leqslant 3) \approx \boxed{0{,}647}$.
5. La probabilité pour que, dans un tel prélèvement, au moins quatre noix soient vides est :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - P(X \leqslant 3) \\ &\approx 1 - 0{,}647 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geqslant 4) \approx 0{,}353}$$

Partie C : Loi normale

1. Une noix pèse en moyenne 28 grammes donc le filet de 100 noix pèse en moyenne en gramme $100 \times 28 = 2\,800$, soit 2,8 kg.
2. D'après le cours : $P(20 \leqslant Y \leqslant 36) = P(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma) \approx \boxed{0{,}95}$.
3. La probabilité pour qu'une noix prise au hasard dans la production soit rejetée est : $\boxed{P(X < 18) \approx 0{,}006}$.

Exercice 2 (10 points)

On considère les fonctions numériques f et g définies pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\,;\,90]$ par

$$f(x) = x + \frac{900}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 0{,}25x + 60.$$

Partie A

1. Sur $[10\,;\,90]$, f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{900}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 900}{x^2} \\ &= \frac{(x-30)(x+30)}{x^2} \end{aligned}$$

   Signe de $f'(x)$:

   - Le dénominateur est un carré : il est strictement positif sur $[10\,;\,90]$.
   - $1x^2 - 900$ est du signe de 1 sauf entre les racines -30 et 30.

   Tableau de variations :

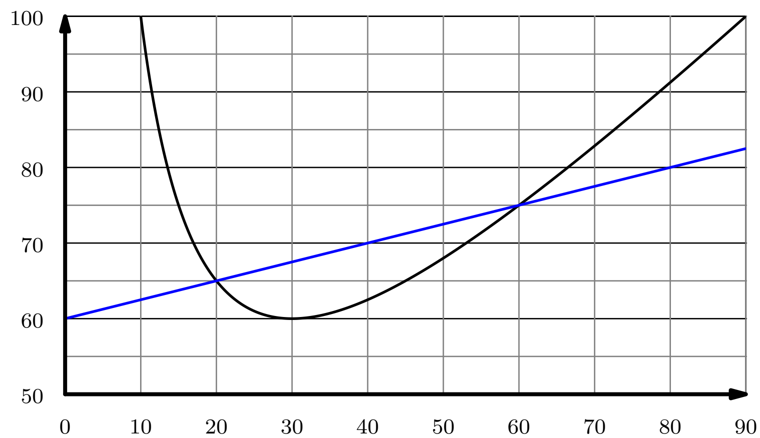
x	10		30		90
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	100	$\searrow$	60	$\nearrow$	100

2. (a) Tableau de valeurs :

x	10	20	30	40	50	60	80	90
$f(x)$	100	65	60	62,5	68	75	91,25	100

   (b) Courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.

3. Tracé de $\mathcal{D}$.



Partie B

1. Les charges quotidiennes sont minimales quand f est minimale, c'est-à-dire pour une production de $\boxed{\text{30 objets}}$. Le montant de ces charges minimales est alors $f(30) = \boxed{60\text{€}}$.
2. (a) Graphiquement : pour être bénéficiaire, le C.A.T. doit limiter sa production entre 20 et 60 objets (là où la droite $\mathcal{D}$ des recettes est au-dessus de la courbe des charges $\mathcal{C}$). afin d'être bénéficiaire.

   (b) L'équation $f(x) = g(x)$

$$x + \frac{900}{x} = 0{,}25x + 60$$

   En multipliant les deux membres par x :

$$x^2 + 900 = 0{,}25x^2 + 60x$$

$$x^2 - 0{,}25x^2 - 60x + 900 = 0$$

$$0{,}75x^2 - 60x + 900 = 0$$

   (c) L'équation du second degré $0{,}75x^2 - 60x + 900 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ car son discriminant $\Delta = 60^2 - 4 \times 0{,}75 \times 900 = 900$ est strictement positif :

$$x_1 = \frac{60 - \sqrt{900}}{2 \times 0{,}75} = \boxed{20} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{60 + \sqrt{900}}{2 \times 0{,}75} = \boxed{60}$$

Ces solutions sont dans l'intervalle $[10\ ;\ 90]$ et on retrouve bien les les résultats du (a) pour l'intersection des courbes de f et g.

3. Le bénéfice quotidien que réalise le centre s'il produit 35 objets par jour est

$$g(35) - f(35) \approx 68{,}75 - 60{,}71 = 8{,}04€$$

4. Le bénéfice quotidien pour une production de x objets est donné par

$$B(x) = g(x) - f(x) = 0{,}25x + 60 - x - \frac{900}{x} = -0{,}75x + 60 - \frac{900}{x}$$

Sa dérivée est

$$B'(x) = -0{,}75 + \frac{900}{x^2} = \frac{-0{,}75x^2 + 900}{x^2}$$

Elle est du signe de $-0{,}75$ sauf entre les racines de $-0{,}75x^2 + 900$ qui valent :

$$x_1 = -20\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 20\sqrt{3}$$

x	10		$20\sqrt{3}$		90
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B		$\nearrow$		$\searrow$	

Comme $20\sqrt{3} \approx 34{,}6$ n'est pas un nombre entier d'objets, calculons :
$B(34) \approx 8{,}029$
$B(35) \approx 8{,}036$
Le bénéfice quotidien maximal que le centre peut réaliser est $\boxed{8{,}04€}$ pour une production de $\boxed{\text{35 objets}}$.