BTS BLANC
SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

22 novembre 2023

SUJET pour les ALTERNANTS

Durée : 2 heures

Seuls les points supérieurs à 10 sont pris en compte.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Ce document comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Dès que ce document vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Exercice 1 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse à la production d'un producteur de noix (nuciculteur) du Périgord.

Partie A : Probabilités conditionnelles

Pour ce nuciculteur, 62 % des noix récoltées sont de la variété « Franquette », 27 % des noix récoltées sont de la variété « Corne » et le reste sont des noix de la variété « Marbot »,

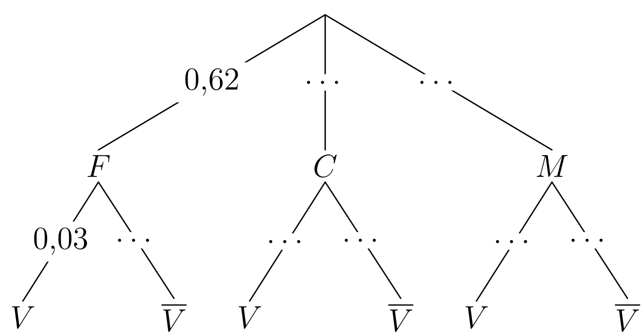
Une étude statistique a montré que 3 % des noix de la variété « Franquette », 4 % des noix de la variété « Corne » et 2 % des noix de la variété « Marbot » sont vides quand elles sont récoltées.

On choisit une noix au hasard dans la récolte de ce nuciculteur. Toutes les noix ont la même probabilité d'être choisies.

On s'intéresse alors aux évènements suivants :

- F : la noix est de la variété « Franquette »
- C : la noix est de la variété « Corne »
- M : la noix est de la variété « Marbot »
- V : la noix est vide ; $\overline{V}$ est l'évènement contraire de V.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) Calculer la probabilité que la noix soit de la variété « Franquette » et qu'elle soit vide.

   (b) Calculer la probabilité $P\left(F \cap \overline{V}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

3. Démontrer que $P(V) = 0{,}031\,6$.

4. On suppose que la noix choisie n'est pas vide.

   Quelle est la probabilité qu'elle soit de la variété « Corne » ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie B : Loi binomiale

On prélève au hasard 100 noix dans la récolte de ce nuciculteur.

La quantité de noix est assez grande pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 noix dans la récolte de ce nuciculteur, associe le nombre de noix vides.

On admet que la probabilité pour qu'une noix soit vide est égale à 0,03.

1. Justifier que la variable X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer $P(X = 0)$, arrondi à 0,001 près et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Calculer $P(X \leqslant 3)$. Arrondir à 0,001 près.
5. Calculer la probabilité pour que, dans un tel prélèvement, au moins quatre noix soient vides. Arrondir à 0,001 près.

Partie C : Loi normale

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque noix récoltée par ce nuciculteur, associe sa masse en grammes.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 28 et d'écart-type 4.

1. Le nuciculteur vend une partie de sa récolte sous la forme de filets contenant 100 noix chacun. Quelle est la masse moyenne d'un tel filet ?
2. Déterminer $P(20 \leqslant Y \leqslant 36)$. Arrondir à 0,01 près.
3. Le nuciculteur décide de ne pas utiliser les noix dont la masse est inférieure à 18 grammes.

   Déterminer la probabilité pour qu'une noix prise au hasard dans la production soit ainsi rejetée. Arrondir à 0,001 près.

Exercice 2 (10 points)

On considère les fonctions numériques f et g définies pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\,;\,90]$ par

$$f(x) = x + \frac{900}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 0{,}25x + 60.$$

Partie A

1. Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, puis vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;\,90]$, $f'(x)$ peut s'écrire :

   $$f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}.$$

   Étudier le signe de $f'(x)$ quand x appartient à l'intervalle $[10\,;\,90]$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur ce même intervalle.
2. (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	20	30	40	50	60	80	90
$f(x)$		65				75		

   (b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (unité graphique 1 cm pour 10 unités). On pourra utiliser le papier millimétré de la page 5.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite représentative de la fonction g. Tracer $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.

Partie B

Un centre d'aide par le travail (C.A.T.) s'est spécialisé dans la fabrication de petits objets décoratifs.

Chaque jour la production varie entre 10 et 90 objets.

Le montant journalier des charges liées à cette production est donné en euros par $f(x)$ où x désigne le nombre d'objets fabriqués chaque jour.

Quelle que soit sa production, le C.A.T. reçoit une aide journalière de 60 euros ainsi que 0,25 euro par objet fabriqué. La recette journalière en euros est donc donnée par $g(x)$ si x est le nombre d'objets fabriqués chaque jour.

1. Quelle est la production qui minimise les charges quotidiennes ? Quel est le montant de ces charges minimales ?
2. (a) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel le C.A.T. doit limiter sa production afin d'être bénéficiaire. On justifiera cette lecture graphique par des tracés en pointillé.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $0{,}75x^2 - 60x + 900 = 0$.
   (c) Résoudre l'équation $0{,}75x^2 - 60x + 900 = 0$ dans l'intervalle $[10\ ;\ 90]$. Retrouve-t-on les résultats du (a) ?
3. Calculer le bénéfice quotidien que réalise le centre s'il produit 35 objets par jour.
4. Par une méthode de votre choix, déterminer avec précision le bénéfice quotidien maximal que le centre peut réaliser. Pour quelle(s) production(s) est-il réalisé ?
   On détaillera la démarche suivie.

Formulaire de dérivation

Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$

Opérations

Fonction	Dérivée
$f = U + V$	$f' = U' + V'$
$f = kU$	$f' = kU'$
$f = UV$	$f' = UV' + U'V$
$f = \dfrac{U}{V}$	$f' = \dfrac{VU' - UV'}{V^2}$
$f = \dfrac{1}{V}$	$f' = \dfrac{-V'}{V^2}$
$f = U^n$	$f' = nU'U^{n-1}$
$f = \sqrt{U}$	$f' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
$f = \ln(U)$	$f' = \dfrac{U'}{U}$
$f = \exp(U) = \mathrm{e}^U$	$f' = U'\mathrm{e}^U$

Ne pas oublier de rendre cette page

NOM :