BTS BLANC

SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

Épreuve EF2

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

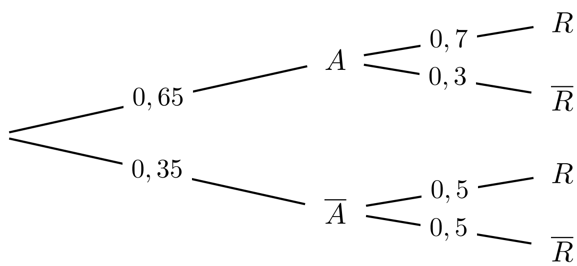
30 novembre 2022

CORRIGÉ

Exercice 1 (10 points)

Partie A

1. L'événement B est l'événement $\overline{A}$. On donne la valeur des probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.
   - 65 % de la quantité nécessaire provient du producteur A donc $\boxed{P(A) = 0,65}$.
   - Parmi la quantité provenant du producteur A, 70 % sont des roses donc $\boxed{P_A(R) = 0,7}$.
   - Parmi la quantité provenant du producteur B, il y a autant de roses que de jasmin donc $P_{\overline{A}}(\overline{R}) = \boxed{P_{\overline{A}}(R) = 0,5}$.
2. On réalise un arbre de probabilités représentant la situation.



3. La probabilité que la fleur provienne du producteur A et soit une rose est :

$$P\left(A \cap R\right) = P(A) \times P_A(R) = 0,65 \times 0,7 = \boxed{0,455}$$

4. Le directeur a besoin d'au moins 60 % de roses pour ses créations ; on calcule $P(R)$:

$$P(R) = P\left(A \cap R\right) + P\left(\overline{A} \cap R\right) = 0,455 + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(R) = 0,455 + 0,35 \times 0,5 = \boxed{0,63}$$

   c'est-à-dire 63 %.
   Donc la commande du directeur peut convenir.
5. Sachant que la fleur est une rose, la probabilité qu'elle provienne du producteur A est :
   $P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,455}{0,63} \simeq \boxed{0,722}$.

Partie B

1. On répète 100 fois, de manière indépendante une expérience de Bernoulli (prendre au hasard un flacon de parfum) à deux issues : le flacon contient du jasmin avec une probabilité $p = 0{,}37$ ou le flacon ne contient pas de jasmin.

   Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de flacons contenant du jasmin suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}37$.
2. La probabilité d'obtenir dans le lot exactement 40 flacons contenant du jasmin est :

$$\boxed{P(X = 40) \simeq 0,067}$$

3. La probabilité d'obtenir au moins 30 flacons contenant du jasmin est :

$$\boxed{P(X \geqslant 30) \simeq 0,942}$$

(sur les calculatrices anciennes, on effectue $1 - P(X \leqslant 29)$)

Partie C

1. La probabilité que le flacon contienne moins de 49 mL de parfum est :

$$\boxed{P(Y < 49) \simeq 0{,}006\,2}$$

2. On estime qu'un flacon de parfum est conforme lorsque la quantité de parfum qu'il contient est comprise entre 49 et 51 mL.
   (a) La probabilité que le flacon soit non conforme est :

$$1 - P(49 \leqslant Y \leqslant 51) \simeq 1 - 0{,}987\,6 \simeq \boxed{0{,}012\,4}$$

   (b) L'entreprise a produit 120 000 flacons. On estime que 1,2 % des flacons ne sont pas conformes.
   Le nombre de flacons non conformes est :

$$120\,000 \times \frac{1,2}{100} = \boxed{1\,440}$$

   (c) Un flacon est vendu 25 €; $1\,440 \times 25 = 36\,000$.
   Donc la perte de chiffre d'affaires pour l'entreprise peut être estimée à $\boxed{36\,000 \text{ €}}$.

Exercice 2 (10 points)

Partie A

1. Pour 12 objets fabriqués et vendus :
   — le coût de fabrication est : $C(12) = \boxed{1400 \text{ €}}$
   — la recette est $200 \times 12 = \boxed{2400 \text{ €}}$
   — le bénéfice est : $2400 - 1400 = \boxed{1000 \text{ €}}$.
2. (a) La recette est $\boxed{R(x) = 200x}$.
   (b) Le bénéfice pour x objets vendus est :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 200x - (2x^3 - 54x^2 + 470x + 80) \\ &= 200x - 2x^3 + 54x^2 - 470x - 80 \\ B(x) &= -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80 \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout x de $[0\,;\,21]$,

$$B'(x) = -6x^2 + 108x - 270$$

Le développement de $-6(x-3)(x-15)$ donne

$$\begin{aligned} -6(x-3)(x-15) &= -6(x^2 - 15x - 3x + 45) \\ &= -6x^2 + 90x + 18x - 270 \\ &= -6x^2 + 108x - 270 \end{aligned}$$

On a bien

$$B'(x) = -6(x-3)(x-15)$$

(b) $B'(x)$ est du signe de -6 sauf entre ses racines 3 et 15.

x	0		3		15		21
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B	-80	$\searrow$	-458	$\nearrow$	1270	$\searrow$	-458

(c) Le bénéfice est-il maximum pour 15 objets fabriqués comme indiqué dans le tableau de variations. Le bénéfice maximum vaut

$$B(15) = \boxed{1270\text{ €}}$$

Partie B

La production est en réalité au moins égale à 6 objets. On étudie donc la fonction B seulement sur l'intervalle $[6\ ;\ 21]$.

1. Tableau de valeurs : voir 'annexe 1.
2. Représentation de la fonction B (voir annexe 2)
3. Pour rester bénéficiaire, l'entreprise doit vendre

   au moins 8 objets (car $B(7) = -10 < 0$ et $B(8) = 192 > 0$)

   mais pas plus de 20 (car $B(20) = 120 > 0$ et $B(21) = -458 < 0$).
4. Tracé de la droite Δ d'équation $y = 1\,000$.
   Graphiquement, le bénéfice $B(x)$ dépasse 1000 pour $x \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$.
5. La vitesse de croissance du bénéfice est maximale quand le coefficient directeur de la tangente à la courbe de B est maximal.
   Ce coefficient directeur est $B'(x) = -6x^2 + 108x - 270$. Cette fonction du second degré admet un maximum en $-\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-108}{2 \times (-6)} = 9$.
   La vitesse de croissance du bénéfice est maximale pour 9 objets.

Nom :

ANNEXE 1. À rendre avec la copie

x	6	8	10	12	14	16	18	21
$B(x)$	-188	192	620	1000	1236	1232	892	-458

ANNEXE 2. À rendre avec la copie