BTS BLANC

SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

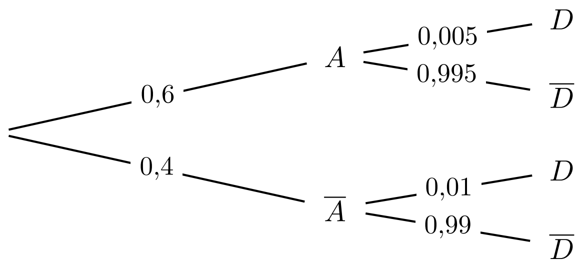
21 mars 2024

CORRIGÉ pour les ALTERNANTS

Exercice 1 (10 points)

Partie A

1. Arbre de probabilités :



2. La probabilité de l'évènement D est

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap \overline{A}) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(D) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}005 + 0{,}4 \times 0{,}01 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0{,}007}$$

3. Sachant que le composant prélevé est défectueux, la probabilité qu'il provienne du fournisseur B est

$$\begin{aligned} P_D(\overline{A}) &= \frac{P(D \cap \overline{A})}{P(D)} \\ &= \frac{0{,}004}{0{,}007} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_D(\overline{A}) = 0{,}571}$$

Partie B

1. On répète 50 fois, de manière indépendante, l'expérience de Bernoulli à deux issues : le composant est défectueux (D) ou pas ($\overline{D}$). Le nombre X de composants défectueux suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p = 0{,}007$.
2. La probabilité que le prélèvement ne comporte aucun composant défectueux est

$$\boxed{P(X = 0) \simeq 0{,}704}$$

3. La probabilité que le prélèvement comporte au plus un composant défectueux est

$$\boxed{P(X \leqslant 1) \simeq 0{,}952}$$

Partie C

1. La probabilité qu'un jour donné le technicien ait besoin de plus de 110 composants est

$$\boxed{P(Y > 110) \simeq 0{,}159}$$

2. Au début d'une journée, le technicien constate qu'il n'y a plus que 90 composants en stock. La probabilité que, ce jour-là, il ne puisse pas finir son travail vaut

$$\boxed{P(Y > 90) \simeq 0{,}841}$$

Partie D

La durée de vie, en mois, d'un composant, peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Pour tout réel positif t, $\boxed{P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}}$.
2. De $P(T > 24) = 0{,}698$, on déduit :

$$e^{-24\lambda} = 0{,}698$$

$$-24\lambda = \ln(0{,}698)$$

$$\lambda = \frac{\ln(0{,}698)}{-24}$$

$$\boxed{\lambda \simeq 0{,}015}$$

3. (a) L'espérance mathématique de la variable T, arrondie à l'unité, est

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \simeq \boxed{67}$$

(b) La probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 3 ans est

$$P(T > 36) = e^{-0{,}015\times 36}$$

$$\boxed{P(T > 36) \simeq 0{,}583}$$

Exercice 2 (10 points)

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,14]$ par

$$f(x) = \frac{x + 1 - \ln x}{x}.$$

1. (a) Pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,14]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\left(1 + 0 - \frac{1}{x}\right) - 1(x + 1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x - 1 - x - 1 + \ln x}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{\ln x - 2}{x^2} \end{aligned}$$

(on a utilisé la dérivée de $\frac{U}{V}$)

(b) Dans $[1\,;\,14]$ l'inéquation $\ln x - 2 \geqslant 0$ équivaut successivement à

$$\ln x \geqslant 2$$

$$x \geqslant e^2$$

La solution de l'inéquation est donc $\boxed{\left[e^2\ ;\ 14\right]}$.

Comme $x^2 > 0$ ici, on en déduit le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[1\,;\,14]$:

- si $x \in \left[1\ ;\ e^2\right]$, alors $f'(x) \leqslant 0$;
- si $x \in \left[e^2 1\ ;\ 14\right]$, alors $f'(x) \geqslant 0$;

(c) Tableau de variation de f sur $[1\,;\,14]$:

x	1		e^2		14
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	$\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	

2. (a) Tableau de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	14
$f(x)$	2	1,15	0,97	0,90	0,88	0,87	0,86	0,87	0,88

(b) Courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

3. (a) Dans $[1\,;\,14]$ l'équation $f(x) = 1$ équivaut successivement à

$$\frac{x + 1 - \ln x}{x} = 1$$

$$x + 1 - \ln x = x$$

$$1 = \ln x$$

$$e^1 = x$$

La solution est $\boxed{e}$.

(b) On note $\alpha = e$. Placement du point I$(e\ ;\ 1)$.

B. Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,14]$ par :

$$F(x) = x + \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

dérivons F :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times 2 \times (\ln x) \times \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \\ &= \frac{x + 1 - \ln x}{x} \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

(pour le 3e terme, on a utilisé la dérivée de U^n).

Donc F est une primitive de f sur $[1\,;\,14]$.

2. (a)

$$\begin{aligned}
J &= \int_1^{14} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(14) - F(1) \\
&= 14 + \ln 14 - \frac{1}{2}(\ln 14)^2 - \left(1 + \ln 1 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right) \\
&= 14 + \ln 14 - \frac{1}{2}(\ln 14)^2 - \left(1 + 0 - \frac{1}{2}(0)^2\right) \\
J &= \ln 14 - \frac{1}{2}(\ln 14)^2 + 13
\end{aligned}$$

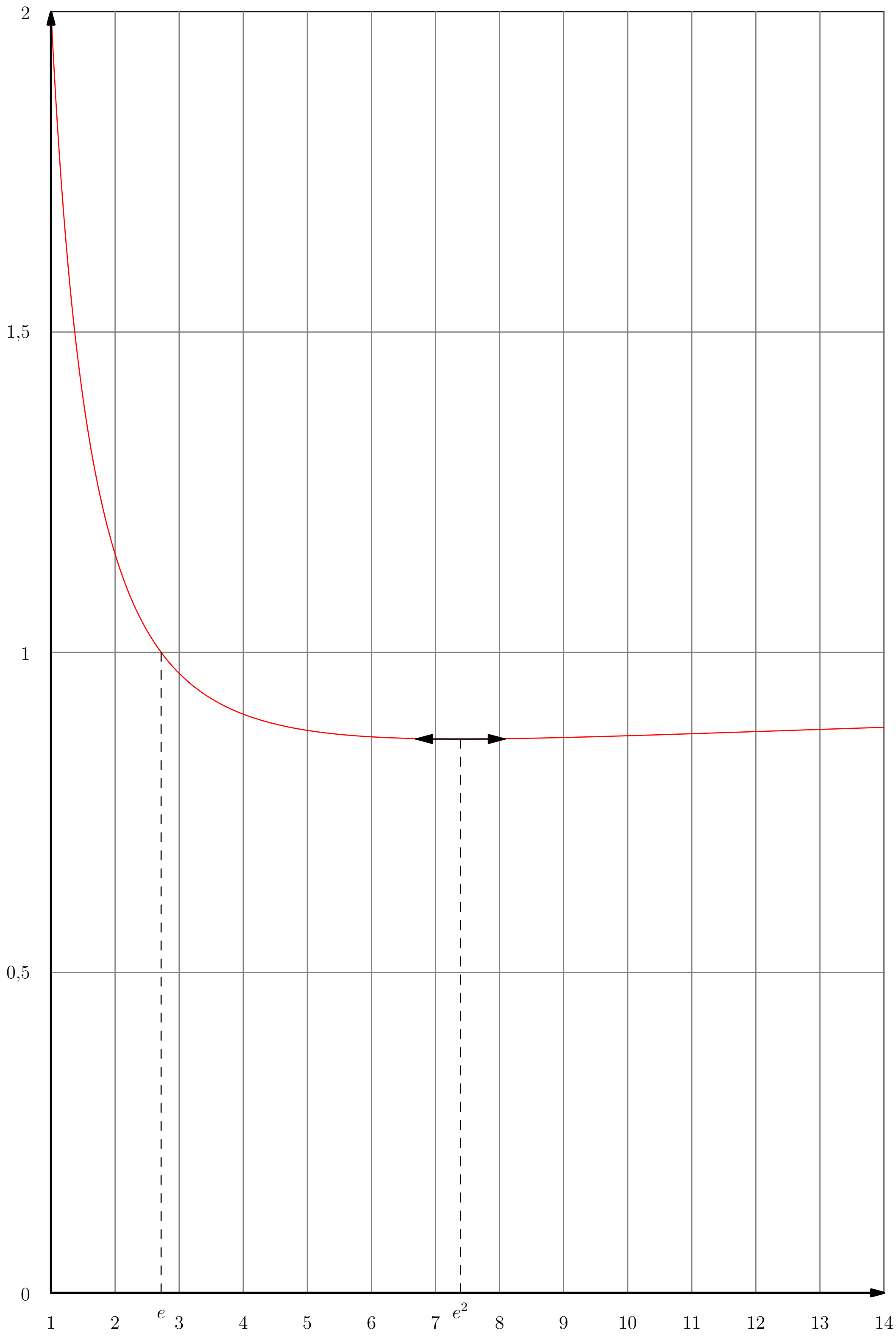
(b) Une valeur approchée de J arrondie à 10^{-2} est $\boxed{J \simeq 12{,}16}$.

C. Application des résultats des parties A et B

1. La quantité de pièces à fabriquer, en centaine, pour que le coût moyen soit minimal est $e^2 \simeq 7{,}39$.

   Le coût moyen minimal de fabrication d'un pièce est $f\left(e^2\right) \simeq \boxed{0{,}86 \text{ €}}$.
2. La quantité de pièces à fabriquer, en centaines, pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit un euro est, d'après le A.3.(a), $e \simeq \boxed{2{,}72}$.
3. La valeur moyenne de $f(x)$ lorsque x varie dans $[1\,;\,14]$ est

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{14-1}\int_1^{14} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\simeq \boxed{0{,}94 \text{ €}}
\end{aligned}$$


2
1,5
1
0,5
0
1
2
e
3
4
5
6
7
e^2
8
9
10
11
12
13
14