BTS BLANC

SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

21 mars 2024

SUJET pour les ALTERNANTS

Durée : 2 heures

Seuls les points supérieurs à 10 sont pris en compte.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Ce document comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Dès que ce document vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Exercice 1 (10 points)

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Une entreprise qui assemble des ordinateurs achète et stocke un certain type de composants informatiques. Le but de cet exercice est d'étudier certains aspects liés à ces composants.

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

L'entreprise achète les composants auprès de deux fournisseurs nommés A et B. Le fournisseur A lui procure 60 % de ses composants, le reste provient du fournisseur B.

Une étude statistique révèle que 0,5 % des composants provenant du fournisseur A sont défectueux, et que 1 % de ceux provenant du fournisseur B le sont également.

On prélève au hasard un composant dans le stock de l'entreprise.

On note A l'évènement « le composant provient du fournisseur A » et D l'évènement « le composant est défectueux ».

1. Traduire les données de l'énoncé dans un arbre de probabilités à l'aide des évènements A et D.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Sachant que le composant prélevé est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur B ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 0,7 % des composants du stock de l'entreprise sont défectueux.

Un technicien prélève au hasard 50 composants dans ce stock pour réaliser des assemblages. On considère que le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement de 50 composants à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, parmi les 50 composants prélevés, comptabilise le nombre de composants défectueux.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que le prélèvement ne comporte aucun composant défectueux.
3. Calculer la probabilité que le prélèvement comporte au plus un composant défectueux.

Partie C

Pour un certain type d'assemblage, le besoin journalier d'un technicien de l'entreprise, en nombre de composants, peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 10$.

1. Quelle est la probabilité qu'un jour donné le technicien ait besoin de plus de 110 composants ?
2. Au début d'une journée, le technicien constate qu'il n'y a plus que 90 composants en stock.

   Quelle est la probabilité que, ce jour-là, il ne puisse pas finir son travail ?

Partie D

La durée de vie, en mois, d'un composant, peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Exprimer en fonction de λ la probabilité $P(T \geqslant t)$, pour tout réel positif t.
2. Sachant que $P(T > 24) = 0{,}698$, calculer λ en arrondissant la valeur au millième.
3. Dans cette question on prendra $\lambda = 0{,}015$.
   (a) Déterminer l'espérance mathématique de la variable T, arrondie à l'unité.
   (b) Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 3 ans.

Exercice 2 (10 points)

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,14]$ par

$$f(x) = \frac{x + 1 - \ln x}{x}.$$

1. (a) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,14]$, $f'(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$.
   (b) Résoudre dans $[1\,;\,14]$ l'inéquation $\ln x - 2 \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[1\,;\,14]$.
   (c) Établir le tableau de variation de f sur $[1\,;\,14]$.
2. (a) Compléter, sur le sujet, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	14
$f(x)$			0,97						

   (b) Construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthogonal. Sur l'axe des abscisses, on prend un centimètre (ou un grand carreau) pour une unité et, sur l'axe des ordonnées, on prend dix centimètres (ou dix grands carreaux) pour une unité.
3. (a) Résoudre dans $[1\,;\,14]$ l'équation $f(x) = 1$.
   (b) On note α la solution obtenue au (a). Placer sur la figure le point I d'abscisse α.

B. Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,14]$ par :

$$F(x) = x + \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur $[1\,;\,14]$.
2. On note $J = \displaystyle\int_1^{14} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Démontrer que $J = \ln 14 - \dfrac{1}{2}(\ln 14)^2 + 13$.

(b) Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-2}.

C. Application des résultats des parties A et B

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 400 exemplaires d'un certain type de pièce pour téléphone mobile.

On admet que, lorsque x centaines d'exemplaires de cette pièce sont fabriquées, $1 \leqslant x \leqslant 14$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est $f(x)$ euros, où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaine, pour que le coût moyen soit minimal.

   Arrondir à 10^{-2}.

   Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir au centime d'euro.
2. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaines, pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit un euro. Arrondir à 10^{-2}.
3. Déduire de la partie B la valeur moyenne de $f(x)$ lorsque x varie dans $[1\,;\,14]$. Donner le résultat arrondi au centime d'euro.

Formulaire de dérivation

Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$

Opérations

Fonction	Dérivée
$f = U + V$	$f' = U' + V'$
$f = kU$	$f' = kU'$
$f = UV$	$f' = UV' + U'V$
$f = \dfrac{U}{V}$	$f' = \dfrac{VU' - UV'}{V^2}$
$f = \dfrac{1}{V}$	$f' = \dfrac{-V'}{V^2}$
$f = U^n$	$f' = nU'U^{n-1}$
$f = \sqrt{U}$	$f' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
$f = \ln(U)$	$f' = \dfrac{U'}{U}$
$f = \exp(U) = \mathrm{e}^U$	$f' = U'\mathrm{e}^U$