8.4 Limites de fonctions

8.4.1 Limites des fonctions usuelles

Limites à l'infini

Exercice 8.5. Que deviennent les fonctions carré, cube, racine carrée, inverse quand x devient très grand ? Compléter le tableau de valeurs suivants :

x	10	100	10^4	10^8	10^{12}
x^2					
x^3					
$\sqrt{x}$					
$\frac{1}{x}$					

La fonction racine prend des valeurs de plus en plus grandes et même : on peut la rendre aussi grande que l'on veut. Si on souhaite que $\sqrt{x} > 10^{50}$, il suffit de choisir $x > 10^{100}$. On dit que la limite de cette fonction, quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$. On le note : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ signifie que $\dfrac{1}{x}$ peut être rendue aussi proche de 0 que l'on veut. Il suffit de choisir x suffisamment grand.

Comportement en $-\infty$

x	-10	-100	-10^4	-10^8	-10^{12}
x^2					
x^3					
$\frac{1}{x}$					

Résultats à connaître et à utiliser sans justifier :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 =$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n =$ $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n =$ $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair)

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n =$ $n \in \mathbb{N}$ et n impair)

Asymptotes horizontales

Définition 14. Si f admet une limite finie L en $+\infty$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

Exemple : si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (figure ci-dessous).

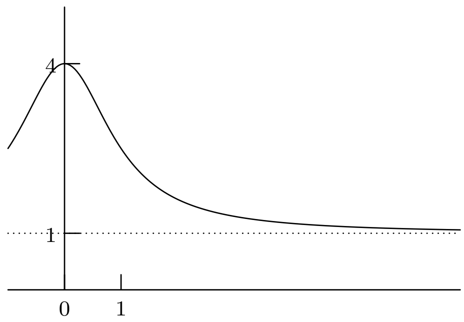


FIGURE 8.3 – Asymptote horizontale

Limites en zéro

Exercice 8.6. Compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-0,1$	$-0,01$	-10^{-4}	-10^{-20}	10^{-20}	10^{-4}	$0,01$	$0,1$
$\frac{1}{x}$								
$\frac{1}{x^2}$								

Pour la fonction inverse, il faut distinguer deux cas : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

Résultats à connaître et à utiliser sans justifier :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$$

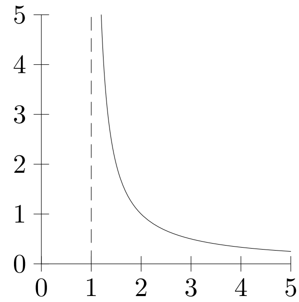
Asymptotes verticales

Observation : soit f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Quand x tend vers 1 en étant supérieur à 1, $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes :

x	2	1,5	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	1	2	10	100	1000

Définition 15. Si une fonction f admet une limite infinie en a (à droite ou à gauche ou les deux), la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Exemple : pour la fonction f de l'observation, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f (figure ci-dessous).



Exercices : 8.8 et 8.9.

8.4.2 Limites et opérations

Dans toute cette section, L, L' et a sont des nombres réels (au besoin, $\lim\limits_{x\to a}$ peut être remplacé par $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}$). f et g sont deux fonctions admettant une limite en a.

On admet les résultats suivants :

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$						

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L>0	L>0	L<0	L<0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$									

Exemples :

— Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(Quand $x \to -\infty$, on ne peut pas conclure immédiatement : on dit parfois que la forme est indéterminée. On saura conclure bientôt.)

— Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$$

On veut déterminer la limite de g à droite de 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \qquad\qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \qquad\qquad \text{donc ???}$$

On ne peut pas conclure immédiatement. Mais on peut transformer l'expression de g :

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \quad .$

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L$\neq 0$	0 et $f(x) > 0$ quand $x \to a$	0 et $f(x) < 0$ quand $x \to a$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$				

Exercice 8.7. Déterminer

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{1}{x-3} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{1}{x-3}$$

Limite d'un quotient

$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ donc les règles relatives à la limite d'un quotient de deux fonctions se déduisent des propriétés sur le produit et l'inverse.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L$\neq 0$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'$\neq 0$	0	$\pm\infty$	L'	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$						

Exemples

— Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to+\infty} \left(x^2+x\right) =$$

Puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

— Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}} (x+1) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}} (x+2) = 0 \text{ et } x+2>0\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{\substack{x\to-2\\ x>-2}} f(x) = -\infty$$

Méthodes pour lever les formes indéterminées

- Limite à l'infini d'un polynôme, d'un quotient de polynômes

  Proposition 2. En $\pm\infty$, une fonction polynôme se comporte comme son terme de plus grand degré.

  Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(7x^5 - 2x^2\right) =$

  Proposition 3. En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

  Exemple :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5-2x^2}{3x^2-1} =$$

- Supplément ? Pour certaines expressions comportant des racines carrées, on peut multiplier par une expression « conjuguée ».
  Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+100}-\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+100}-\sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+100}-\sqrt{x})(\sqrt{x+100}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+100}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{x+100-x}{\sqrt{x+100}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{100}{\sqrt{x+100}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

  La limite devient ainsi facile à calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+100}-\sqrt{x}=0$
- Penser au nombre dérivé

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = \underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}}_{\text{nombre dérivé de } \sin \text{ en } 0} = \cos 0 = 1$$

- Mettre en facteur x (ou x^n) dans le cas d'un quotient ou d'une différence de fonctions tendant vers l'infini.
- Tous les coups sont permis.

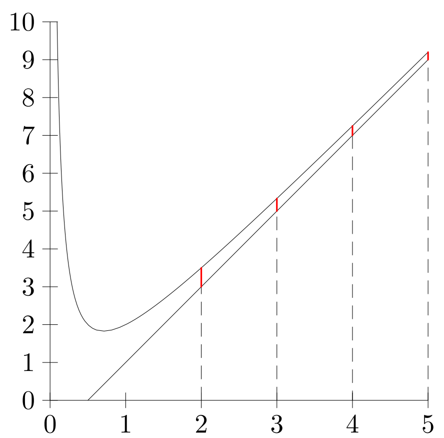
8.4.3 Limite de $(u(x))^n$

Exemple : Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+3)^5$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^2+3 = \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to-\infty}(2x^2+3)^5 = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X^5} = \quad .$$

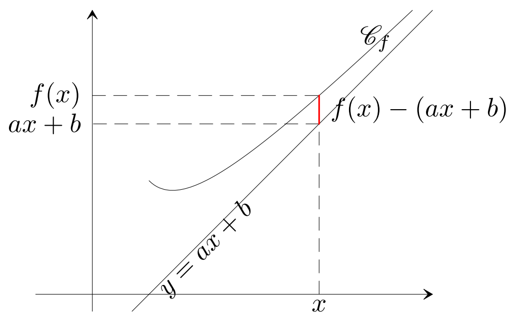
8.4.4 Asymptotes obliques

Observation : soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x}$.



x	2	3	4	5	10	100
$f(x)$	3,5	5,33	7,25	9,2	19,1	199,01
$2x-1$	3	5	7	9	19	199
$\frac{1}{x}$	0,5	0,33	0,25	0,2	0,1	0,01

Définition 16. $\mathscr{D}$ est une droite d'équation $y=ax+b$. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, alors la droite $\mathscr{D}$ est asymptote a la courbe représentative de f en $\pm\infty$.



Remarque : dans le cas ou $a=0$ on retrouve la définition d'une asymptote horizontale.
Exemple : pour la fonction f de l'observation,

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

donc la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Positions relatives d'une courbe et d'une asymptote

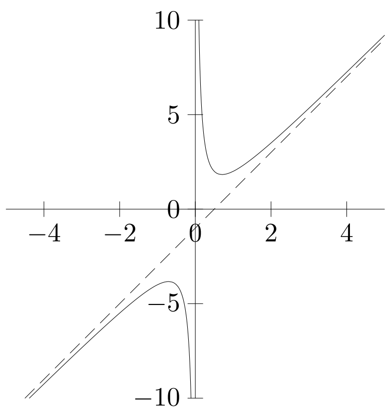
En étudiant le signe de $f(x)-(ax+b)$, on détermine la *position de la courbe par rapport à son asymptote.*

Dans l'exemple,

$$f(x)-(2x+1) = \frac{1}{x}$$

Cette différence est positive quand $x>0$. Donc la courbe de f est au-dessus de la droite sur $]0;+\infty[$.

De même, $f(x)-(2x+1)<0$ quand $x<0$. Donc la courbe de f est en dessous de la droite sur $]-\infty;0[$.



Exercices sur les limites

Exercice 8.8. Dans chaque cas, à l'aide du tableau proposé, donner une représentation graphique de la fonction. Faire apparaître les éventuelles asymptotes et les tangentes de pente nulle.Préciser les limites aux bornes de l'intervalle de définition et les équations des éventuelles asymptotes.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	
f	-1	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$

x	0		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
g	-1	↘	-5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5

Exercice 8.9. Donner une représentation graphique possible des fonctions f et g vérifiant toutes les conditions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to-4\\x<-4}} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to-4\\x>-4}} f(x) = +\infty$$

$$f(-6) = 0 \quad ; \quad f(-1) = 4 \quad ; \quad f(4) = 4 \quad ; \quad f'(-6) = f'(-1) = -1 \quad ; \quad f'(4) = 0$$

2. g est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -6 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$$

$$g'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty\,;\,2[\quad ; \quad g'(-2) = \frac{1}{2} \quad ; \quad g'(2) = 0 \quad ; \quad g(-2) = 1 \quad ; \quad g(2) = 6$$

Exercice 8.10. Dans chacun des cas, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$.

1. $f(x) = 24x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = x^2 - 1x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = 5 - x$

Exercice 8.11. Dans chacun des cas, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f}{g}(x)$.

1. $f(x) = 13x$ et $g(x) = 17x$

2. $f(x) = x^2 - 169$ et $g(x) = 13 + x$
3. $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = 1 - x$

Exercice 8.12. Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-6}$.

Exercice 8.13. Vrai ou faux ?

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère.

x	$-\infty$		0		4		9		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Répondre, par vrai ou faux, aux questions suivantes, en justifiant lorsque la réponse est « faux ».

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 2$.
2. L'équation $f(x) = -3$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
3. L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[4\ ;\ 9]$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geqslant 0$.
5. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

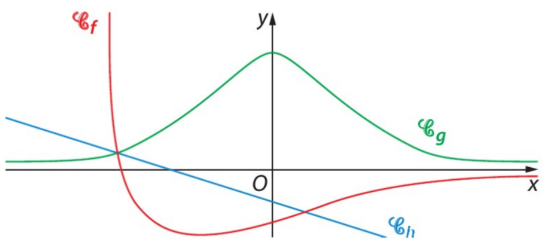
Exercice 8.14. Déterminer la limite en -2 et 3 de $x \mapsto \dfrac{5x}{x^2 - x - 6}$

Exercice 8.15. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$; $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 - 3x}{\sqrt{x}}$, où a est un réel ; $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2}$

Exercice 8.16. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - x^2 + 3}{3x^2 + x - 2}$

Exercice 8.17. Le graphique donne les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$.
L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ et $+\infty$; de plus, $\mathscr{C}_h$ est une droite et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Donner, si possible, les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions : $f + g$; $f - g$; fg ; fh ; $g - h$; $\dfrac{f}{g}$; $\dfrac{f}{h}$; $\dfrac{g}{h}$ et $f \circ h$.



Exercice 8.18. On utilisera exclusivement le logiciel de calcul formel Xcas en ligne (et le navigateur Firefox). Au démarrage, cliquer sur l'icône représentant une baguette magique (en haut à gauche). Les menus intéressants pour cette séance sont

— Analyse/Dériver : pour calculer les fonctions dérivées

— Analyse/Limites : pour calculer des limites

— Algèbre/Équation : pour résoudre des équations et des inéquations.

Pour déterminer le signe des fonctions dérivées $f'(x)$, on pourra par exemple résoudre $f'(x) < 0$.

Travail à rendre :

Pour chacune des fonctions données ci-dessous, on demande :

1. le calcul de la dérivée effectué avec Xcas. Écrire sur la copie l'affichage de la console. Par exemple :

diff(x^2, x)
$2x$

2. l'étude du signe. Écrire sur la copie l'affichage de la console. Par exemple :

solve$(2 * x < 0, x)$
$[x < 0]$

Xcas accepte des commandes du type :

solve(diff$(x^2, x) >= 0, x)$
$[x \geqslant 0]$

3. les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Par exemple :

limite$(1/x, x, +inf)$
0
limite$(1/x, x, 0, -1)$
$-\infty$
limite$(1/x, x, 0, 1)$
$+\infty$

4. le tableau de variations de la fonction (une ligne pour le signe de la dérivée, puis une ligne pour les variations) avec les limites trouvées.

Les fonctions à étudier sont définies par :

- $f(x) = x^3 - 2x + 1$
- $g(x) = \left(x^4 - 2x\right)^3$
- $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{3x^2 - 7}$

Pour h, l'ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$: il faut enlever les valeurs de x qui rendent le dénominateur nul.