SIO_2 (alternants) 1,5 heure 4 octobre 2023

Contrôle de mathématiques approfondies 1

Exercice I

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A – Probabilités conditionnelles

Pour contacter une compagnie d'assurance, deux possibilités sont offertes :

- se rendre en agence ;
- à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients qui se rendent à l'agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.
À l'issue de l'enquête, réalisée auprès de 1 000 clients, les résultats sont les suivants :

- 380 se sont rendus en agence
- parmi les clients qui se sont rendus en agence, 93 % se sont déclarés satisfaits de l'accueil,
- parmi les clients qui ont téléphoné, 15 % ont déclaré qu'il n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

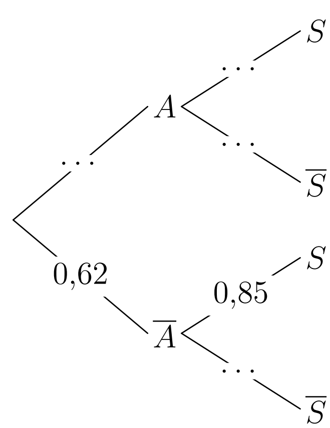
On interroge au hasard un client.
On considère les évènements suivants :

A : « Le client s'est rendu en agence »

S : « Le client est satisfait de l'accueil »

On rappelle que l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$, que la probabilité de l'évènement A se note $P(A)$ et que la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $P_B(A)$.
Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-4}, si nécessaire.

1. Donner la valeur des probabilités : $P(A)$, $P_A(S)$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{S}\right)$.
2. L'arbre de probabilités donné ci-dessous représente la situation. Compléter cet arbre.



3. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.
4. Montrer que la probabilité de S est 0,880 4.
5. Le responsable a pour objectif qu'il y ait moins de 10 % de clients non satisfaits par l'accueil. Cet objectif est-il atteint ?

6. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence ?

Partie B – Loi normale

La compagnie d'assurances s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2016 sur les véhicules qu'elle assure. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros.
L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart type 200.

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. À combien peut-elle estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres ?
2. Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi on peut estimer qu'environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre 800 et 1 600 euros.
3. Par la méthode de votre choix, calculer $P(X > 1\,000)$.
   Donner le résultat arrondi à 10^{-2}.
4. À l'aide de la calculatrice, estimer pour l'année 2016 le pourcentage de sinistres dont le coût sera compris entre 1 000 et 1 500 euros.

Partie C – Loi binomiale

Un employé prend au hasard 10 dossiers de sinistres. Ce tirage est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de dossiers est très grand.
On suppose que la probabilité que le coût du sinistre dépasse 1 000 euros est 0,84.
Soit Y la variable aléatoire qui pour un lot de 10 dossiers pris au hasard indique le nombre de dossiers du lot dont le coût est supérieur à 1 000 euros.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans le lot prélevé par l'employé, tous les dossiers aient un cout supérieur à 1 000 euros. Arrondir la probabilité à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité que l'employé obtienne dans le lot prélevé au moins six dossiers dont le coût est supérieur à 1 000 euros. Arrondir la probabilité à 10^{-3}.

Exercice II

Indiquer sur la copie, pour chaque question posée, la bonne réponse parmi les propositions de l'énoncé ; on demande de justifier rapidement le choix.

1. Si A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ et $P_A(B) = \dfrac{1}{4}$, alors $P(A)$ est égal à :

   a. $\dfrac{2}{3}$ **b.** $\dfrac{1}{24}$ **c.** $\dfrac{1}{12}$

2. Si A et B sont deux événements indépendants avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}2$, alors :

   a. $P(A \cap B) = 0{,}5$ **b.** $P(A \cap B) = 0{,}06$ **c.** On ne peut pas répondre.

3. Si A et B sont deux événements indépendants avec $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(B) = \dfrac{1}{12}$, alors $P(A \cup B)$ est égal à :

   a. $\dfrac{5}{12}$ **b.** $\dfrac{7}{18}$ **c.** On ne peut pas répondre.

4. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}02$. On décide d'approcher la loi suivie par X par la loi normale d'espérance m et d'écart-type σ.
   m est égal à :

   a. 1000 **b.** 20 **c.** 200.

5. Suite de la question 4. Une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de σ est égale à :

   a. 19,6 **b.** 4,47 **c.** 4,43.

6. La variable aléatoire U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;7]$.
   La fonction de densité f de U est définie sur l'intervalle $[2\,;7]$ par $f(t) =$

   a. $\dfrac{1}{7}$ **b.** $\dfrac{1}{5}$ **c.** $\dfrac{2}{7}$.

7. Suite de la question 6. La probabilité $P(3 \leqslant U \leqslant 5)$ est égale à :

   a. 0,2 **b.** 0,3 **c.** 0,4.

SIO$_2$ 2 heures 4 octobre 2023

Corrigé du contrôle de mathématiques approfondies 1

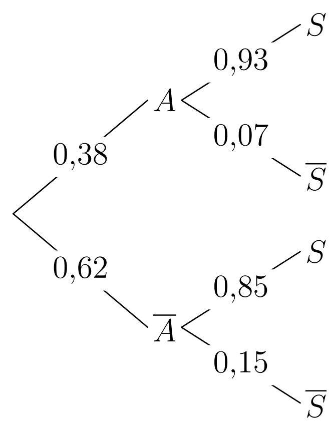
Exercice I

Partie A – Probabilités conditionnelles

1. L'énoncé donne presque directement

$$P(A) = \frac{380}{1000} = 0{,}38$$
$$P_A(S) = 0{,}93$$
$$P_{\overline{A}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}15$$

2. Arbre de probabilités



3. La probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil est

$$P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0{,}38 \times 0{,}93 = \boxed{0{,}3534}$$

4. La probabilité de S est

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cap S) + P(\overline{A} \cap S) \\ &= P(A) \times P_A(S) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(S) \\ &= 0{,}38 \times 0{,}93 + 0{,}62 \times 0{,}85 \\ &= 0{,}880\,4. \end{aligned}$$

5. Le responsable a pour objectif qu'il y ait moins de 10 % clients non satisfaits par l'accueil. Cet objectif n'est pas atteint car $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0{,}1196 > 0{,}1$.

6. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence est

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}3534}{0{,}8804} \simeq \boxed{0{,}4014}$$

Partie B – Loi normale

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. Elle peut estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres à $10\,000 \times 1\,200 = 12\,000\,000$ d'euros.
2. On sait que pour cette loi normale d'espérance 1200, environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre $1200 - 2\sigma = 800$ et $1200 + 2\sigma = 1\,600$.
3. La calculatrice donne $P(X > 1\,000) \simeq \boxed{0{,}84}$.
4. La calculatrice donne $P(1\,000 < X < 1\,500) \simeq \boxed{0{,}77}$.
   Pour l'année 2016 le pourcentage de sinistres dont le coût sera compris entre 1 000 et 1 500 euros peut être estimé à 77%.

Partie C – Loi binomiale

Un employé prend au hasard 10 dossiers de sinistres. Ce tirage est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de dossiers est très grand.
On suppose que la probabilité que le coût du sinistre dépasse 1 000 euros est 0,84.
Soit Y la variable aléatoire qui pour un lot de 10 dossiers pris au hasard indique le nombre de dossiers du lot dont le coût est supérieur à 1 000 euros.

1. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}84$ car on répète 10 fois, de manière indépendante, l'expérience de Bernoulli à deux issues « le coût dépasse 1000 »- « le coût est inférieur à 1000 ».
2. La probabilité que dans le lot prélevé par l'employé, tous les dossiers aient un cout supérieur à 1 000 euros est

$$P(Y = 10) \simeq \boxed{0{,}175}$$

3. La probabilité que l'employé obtienne dans le lot prélevé au moins six dossiers dont le coût est supérieur à 1 000 euros est

$$P(Y \geqslant 6) \simeq \boxed{0{,}987}$$

Exercice II

1. Réponse **a**.
   De $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on déduit

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

2. Réponse **b**.
   Si A et B sont deux événements indépendants, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$$

3. Réponse **b**.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{12}}_{\text{car } A \text{ et } B \text{ indépendants}} \\ &= \frac{7}{18} \end{aligned}$$

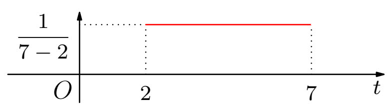
4. Réponse **b**.
   Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}02$.
   On décide d'approcher la loi suivie par X par la loi normale de même espérance

$$m = np = 1000 \times 0{,}02 = 20$$

   et de même écart-type

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0{,}02 \times 0{,}98} \simeq 4{,}43$$

5. Réponse **c**.
   Justifié dans la question précédente.
6. Réponse **b**.
   L'aire sous la courbe représentative de f, entre 2 et 7, doit être égale à 1.
   Le rectangle doit donc mesurer 5 sur $\dfrac{1}{5}$.



7. Réponse **c**.

$$P(3 \leqslant U \leqslant 5) = \frac{5-3}{7-2} = 0{,}4$$