Chapitre 3

Éléments de la théorie des ensembles

3.1 Produit cartésien de deux ensembles

Définition 2. Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x,y) où x est un élément de E et y est un élément de F. On le note $E \times F$.

$$E \times F = \{(x,y) \ ; \ x \in E, \ y \in F\}$$

Exemple 1. Avec $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2\}$,

$$E \times F =$$

Exemple 2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. C'est l'ensemble des cordonnées des points du plan muni d'un repère ... cartésien.

On définit de même le produit cartésien de n ensembles. Ses éléments sont des n-uplets.

Définition 3. Si un ensemble E a un nombre n fini d'éléments, on appelle ce nombre le **cardinal** de E. On le note $\text{card}(E)$.

Proposition 1. Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$, alors $\text{card}(E \times F) = n \times p$.

Exemple : pour l'exemple 1 ci-dessus, $\text{card}(E \times F) =$

3.2 Relations binaires

Exemple : quatre personnes a, b, c, d ont l'habitude de fréquenter certains supermarchés 1, 2, 3.

On peut représenter la situation à l'aide d'un tableau :

a	b	c	d
1, 2		1, 2, 3	2

d'un diagamme sagittal :

ou à l'aide d'une liste de couples de $E \times F$: $(a,1)$, $(a,2)$, $(c,1)$, $(c,2)$, $(c,3)$, $(d,2)$.

On va utiliser le terme de relation binaire pour décrire ceci : la relation "fréquente" pourra être notée $\mathscr{R}$ et on écrira : $a\mathscr{R}1$, $a\mathscr{R}2$, ...

Définition 4. Une relation binaire $\mathscr{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est la donnée d'une partie (un sous-ensemble) noté G de $E \times F$, appelée le graphe de $\mathscr{R}$.

Pour $x \in E$ et $y \in F$, $x\mathscr{R}y$ signifie $(x,y) \in G$.

On aura souvent $E = F$: la relation binaire $\mathscr{R}$ sera définie sur un ensemble E.

Exemple 1. égalité dans E : $x = y$

Exemple 2. inégalité large dans $\mathbb{R}$: $x \geqslant y$

Exemple 3. inégalité stricte dans $\mathbb{R}$: $x < y$

Exemple 4. divisibilité dans $\mathbb{N}^*$: x divise y

Exemple 5. congruence modulo n dans $\mathbb{N}$: $x \equiv y \quad [n]$

Définition 5. $\mathscr{R}$ est une relation binaire sur E.

- $\mathscr{R}$ est **réflexive** si
$$\forall x \in E \qquad x\mathscr{R}x$$
- $\mathscr{R}$ est **symétrique** si
$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$$
- $\mathscr{R}$ est **antisymétrique** si
$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad (x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}x) \Rightarrow x = y$$
- $\mathscr{R}$ est **transitive** si
$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E \qquad (x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$$
- $\mathscr{R}$ est **une relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 1.

Exemple 2.

Exemple 3.

Exemple 4.

Exemple 5.

Définition 6 (Relation d'ordre)**.** Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples : dans $\mathbb{R}$, la relation $\geqslant$ est une relation d'ordre mais pas $<$. Dans $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion est une relation d'ordre.

Définition 7 (Ordre total)**.** Une relation d'ordre $\mathscr{R}$ sur E est une relation d'ordre total si

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (x\mathscr{R}y) \vee (y\mathscr{R}x)$$

On peut comparer tous les éléments. Sinon l'ordre est partiel.

Exercice 3.1. Soient $A = \{a,b\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{3,4\}$. Déterminer les ensembles $A \times B$, $A \times (B \cup C)$ et $(A \times B) \cup (A \times C)$

Exercice 3.2. Déterminer si la relation $\mathscr{R}$ donnée par son graphe $\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ dans $X = \{1,2,3\}$ est réflexive, symétrique, transitive.

Exercice 3.3. Soit $\mathscr{R}$ la relation notée $\approxeq$ et définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$(a,b) \approxeq (c,d) \quad \text{si} \quad ad = bc$$

Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 3.4. On considère la relation binaire $\vDash$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \vDash y$ si $(x - y) \in \mathbb{Z}$.
À-t-on $\frac{2}{3} \vDash \frac{4}{3}$? $\frac{2}{3} \vDash \frac{-4}{3}$?
Montrer que la relation $\vDash$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.5. Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall (x',y') \in \mathbb{N}^2, \qquad (x,y)\mathscr{R}(x',y') \text{ si } (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

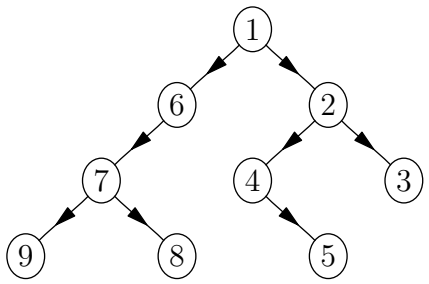
1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.
2. La relation d'ordre $\mathscr{R}$ est-elle totale ou partielle ?

Exercice 3.6. Ordre lexicographique.
Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall (x',y') \in \mathbb{N}^2, \qquad (x,y)\mathscr{R}(x',y') \text{ si } \big((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')\big).$$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation réflexive.
2. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation antisymétrique.
3. On admet que $\mathscr{R}$ est transitive. La relation d'ordre $\mathscr{R}$ est-elle partielle ou totale ?
4. La relation $\mathscr{R}$ permet de classer et de trier des chaînes de caractères à deux éléments ; elle correspond au début du classement alphabétique d'un dictionnaire. Proposer une définition étendant la relation $\mathscr{R}$ à $\mathbb{N}^3$.

Exercice 3.7. On donne le graphe suivant :



Sur l'ensemble des sommets $S = \{1,2,\ldots,9\}$, on définit la relation binaire $\mathscr{R}$ par :
$\forall(x,y) \in S^2 \qquad x\mathscr{R}y$ si $(x = y)$ ou (il existe un chemin de x à y ou de y à x dont tous les arcs sont « orientés à droite »).

Ainsi, par exemple, $2\mathscr{R}3$ et $8\mathscr{R}7$, mais $7\not\mathscr{R}4$ et $2\not\mathscr{R}4$.

L'objectif de cet exercice est de justifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

1. Compléter le tableau suivant :

Sommets x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sommets y tels que $x\mathscr{R}y$									

2. Quelle partie de la définition de $\mathscr{R}$ justifie que $\mathscr{R}$ est réflexive ?
3. La définition de la relation $\mathscr{R}$ où x et y sont interchangeables suffit à justifier que $\mathscr{R}$ est symétrique.

   Démontrer que $\mathscr{R}$ est transitive, c'est-à-dire :

$$\forall(x,y,z) \in S^3 \qquad x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z.$$

   On pourra d'abord considérer le cas où $x = y = z$, puis le cas où $(x = y)$ ou $(y = z)$ ou $(z = x)$.

   Dans le cas où les trois sommets x, y, z sont distincts, pour quels sommets du graphe ($x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$) est une proposition vraie ?

   A-t-on alors $x\mathscr{R}z$?

Le graphe proposé est un cas particulier d'**arbre binaire**, c'est-à-dire d'une arborescence descendante dont le sommet initial unique est appelé **racine**, chaque sommet, ou **œud**, ayant au plus deux successeurs appelés **fils** (fils droit et fils gauche), les sommets sans successeurs étant les feuilles.

En informatique, les **arbres binaires de recherche** sont des arbres binaires particuliers utilisés pour effectuer des tris : chaque nœud possède une clé, c'est-à-dire un nombre satisfaisant à des conditions distinguant son sous-arbre gauche et son sous-arbre droit.

Exercices supplémentaires

Exercice 3.8. Soit P l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathscr{R}$ définie par

$$p\mathscr{R}q \quad \text{si} \quad \frac{p+q}{2} \in P$$

La relation est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

Exercice 3.9. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathscr{R}$ par

$$x\mathscr{R}y \quad \text{si} \quad x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Quelle est la classe d'équivalence[1] d'un élément x de $\mathbb{R}$? Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 3.10. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathscr{R}$ par

$$x\mathscr{R}y \quad \text{si} \quad x + y \text{ est pair}$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Quelles sont les classes d'équivalences de cette relation ?

1. On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble des éléments liés à x, c'est-à-dire $\{y \mid x\mathscr{R}y\}$.

Exercice 3.11. Jeu de dés terriblement non transitifs[2].

Cinq dés cubiques à 6 faces sont équilibrés : chacune des faces a la même probabilité d'apparaître lors d'un lancer. Le dé rouge possède cinq faces marquées d'un 4 et une face d'un 9. Le dé bleu a trois faces 2 et trois faces 7. Le dé vert a cinq faces 5 et une face vierge. Le dé jaune a quatre faces 3 et deux faces 8. Le dé violet a deux faces 1 et quatre faces 6.

Montrer que : le rouge est plus fort que le bleu ; le bleu est plus fort que le vert ; le vert est plus fort que le jaune ; le jaune est plus fort que le violet ; le violet est plus fort que le rouge.

2. Roger MANSUY. « Jeu de dés terriblement non transitifs ». In : *La Recherche 539* (sept. 2018). « Le dé A est plus fort que le dé B » signifie que la probabilité que la probabilité que le résultat du dé A soit supérieur à celui du dé B est strictement supérieure à 1/2.

3.3 Application f d'un ensemble E dans un ensemble F

Définition 8. Une application f associe à tout élément d'un ensemble E un élément unique d'un ensemble F.

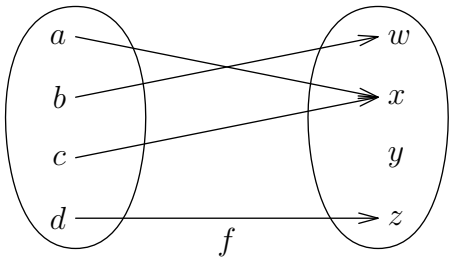
Notation :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$f(x)$ s'appelle **l'image** de x, E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée.
$f(E)$ s'appelle **l'image** de E. Bien sûr, $f(E) \subset F$.

Remarque : à toute application f de E dans F correspond la relation binaire définie dans $E \times F$ par son **graphe** : $\{(x,f(x)); x \in E\}$.

Exemple 1. f est une application de $E = \{a,b,c,d\}$ vers $F = \{w,x,y,z\}$.



$f(E) = \{w,x,z\}$; le graphe de f est $\{(a,x),(b,w),(c,x),(d,z)\}$

Exemple 2. Soit l'application c de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui fait correspondre à tout nombre réel x son carré $c(x) = x^2$. Son graphe est $\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$. On le représente par la parabole bien connue.
L'image de c est $c(\mathbb{R}) = \{x \in R \mid x \geqslant 0\}$.

Soit B une partie de l'ensemble d'arrivée F. L'**image réciproque** de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Exemple 1. $f^{-1}(\{w,x\}) =$
$f^{-1}(\{z\}) =$

Exemple 2. Pour la fonction carré c,
$c^{-1}(\{25\}) =$
$c^{-1}([1;4]) =$

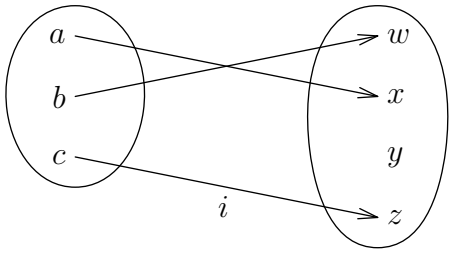
3.4 Injection, surjection, bijection

Définition 9. On dit qu'une application f de E dans F est une injection si deux éléments distincts de E ont des images distinctes :

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \qquad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Remarque : cela revient à dire : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Exemple 3. i est une injection de $E = \{a,b,c\}$ vers $F = \{w,x,y,z\}$.

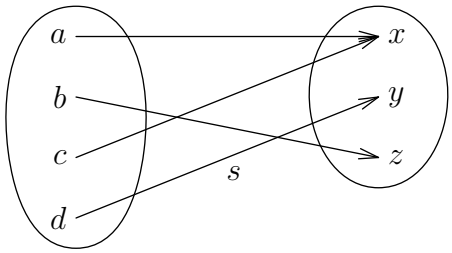


Par contre, f de l'exemple 1 n'est pas injective car a et c ont la même image. La fonction carré non plus, car 3 et -3 ont la même image.

Définition 10. On dit qu'une application f de E dans F est une surjection si tout élément de F admet un antécédent (au moins).

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ \mid\ f(x) = y$$

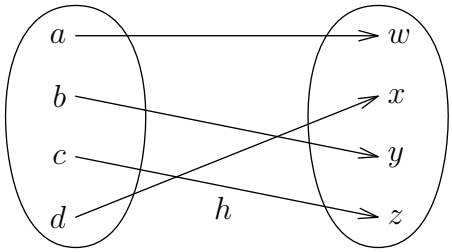
Exemple 4. s est une surjection de $E = \{a,b,c,d\}$ vers $F = \{x,y,z\}$.



Par contre, f de l'exemple 1 n'est pas surjective car y n'a pas d'antécédent. La fonction carré non plus, car -3 n'a pas d'antécédent.

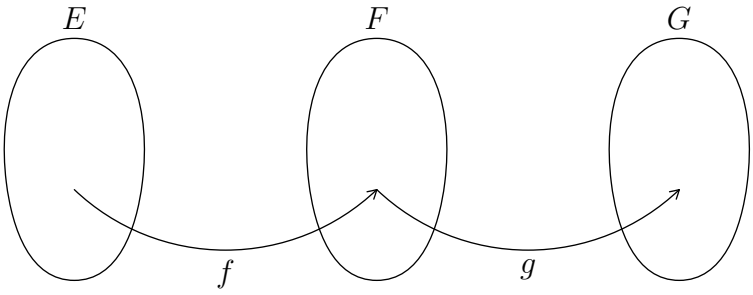
Définition 11. On dit qu'une application f de E dans F est une bijection si elle est injective et surjective.

Exemple 5. h est une bijection de $E = \{a,b,c,d\}$ vers $F = \{w,x,y,z\}$.



3.5 Composition d'applications

Définition 12. Soit f une application de E vers F et g une application de F vers G. L'application, notée $g \circ f$, de E vers G qui à tout x de E associe $g(f(x))$ est la composée de f et g.



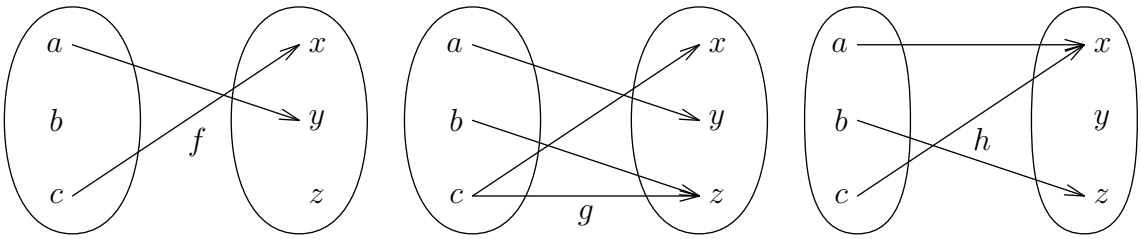
Exemple : considérons

$$\begin{array}{rcl} c : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & c(x) = x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x) = -3x + 7 \end{array}$$

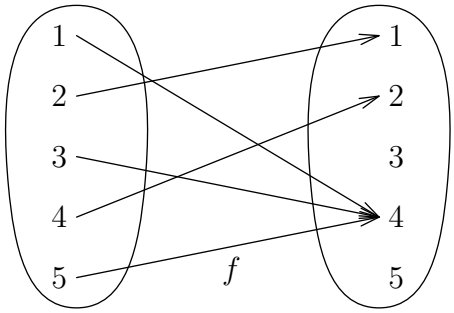
$$\begin{array}{rcl} d \circ c : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d \circ c(x) = \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} c \circ d : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & c \circ d(x) = \end{array}$$

On notera que :
— la composée de deux applications injectives est injective ;
— la composée de deux applications surjectives est surjective ;
— la composée de deux applications bijectives est bijective.

Exercice 3.12. Dire si les diagrammes ci-dessous définissent ou non une application de l'ensemble $A = \{a,b,c\}$ dans l'ensemble $B = \{x,y,z\}$.



Exercice 3.13. Soit $A = \{1,2,3,4,5\}$ et f l'application de A dans A définie par le diagramme :

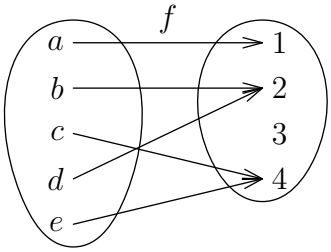


Déterminer les ensembles suivants : $f(\{1,3,5\})$, $f^{-1}(\{2,3,4\})$, $f^{-1}(\{3,5\})$.

Exercice 3.14. Les applications f, g et c de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 - x$, $c(x) = x^2$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

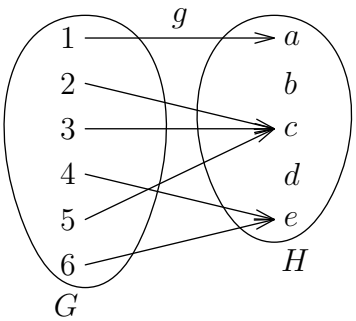
Exercice 3.15. Questions :
— Une application d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal $p < n$ peut-elle être injective ?
— Une application d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal $p > n$ peut-elle être surjective ?

Exercice 3.16. Soit f l'application de E dans F définie par le diagramme ci-dessous.



1. Soit $A = \{a,b,c\}$ et $A' = \{a,d,e\}$.
   (a) Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.
   (b) Comparer $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.
   (c) Déterminer $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$.
2. Soit $B = \{1,2\}$ et $B' = \{3,4\}$.
   (a) Déterminer $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(B')$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B')$.
   (c) Déterminer $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cup B')$.
3. f est-elle injective ?
4. f est-elle surjective ?

Exercice 3.17. Soit g l'application de G dans H définie par le diagramme ci-dessous.

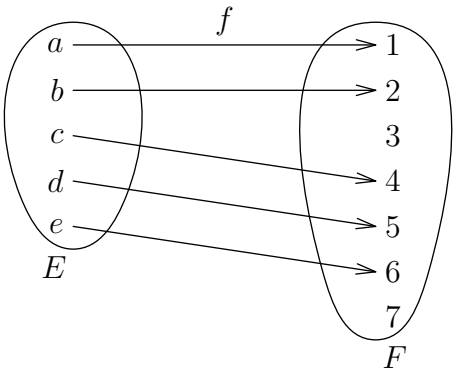


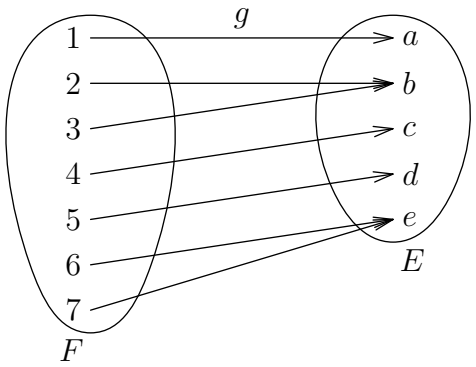
1. Soit $C = \{1,2\}$ et $C' = \{1,3\}$.
   (a) Déterminer $g(C)$ et $g(C')$.
   (b) Comparer $g(C \cap C')$ et $g(C) \cap g(C')$.
   (c) Comparer $g(C \cup C')$ et $g(C) \cup g(C')$.
2. Soit $D = \{a,b,c\}$, $D' = \{c,d,e\}$, $D'' = \{b,d\}$.
   (a) Déterminer $g^{-1}(D)$, $g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D'')$.
   (b) Déterminer $g^{-1}(D) \cap g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D \cap D')$.
   (c) Déterminer $g^{-1}(D) \cup g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D \cup D')$.
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Exercice 3.18. Déterminer l'application composée $g \circ f$ où f est définie dans l'exercice 3.16 où g est définie dans l'exercice 3.17.

$g \circ f$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3.19. Soit f l'application de E dans F et g l'application de F dans E définies par les diagrammes ci-dessous.





1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Mêmes questions avec g.
3. Mêmes questions avec l'application composée $g \circ f$.
4. Mêmes questions avec l'application composée $f \circ g$.

Exercice 3.20. Soit $f : I \longrightarrow J$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f ne soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Exercice 3.21. Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = 2x - 3$.

Trouver les formules permettant de définir les applications composées $f \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ f$.

Exercice 3.22. Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n,m) = mn$. Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n\ ,\ (n+1)^2)$.

f est-elle injective ? f est-elle surjective ? g est-elle injective ? g est-elle surjective ?

Exercice 3.23. On considère les applications f et g définies par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.

Exercice 3.24.

1. Trouver une bijection de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres entiers naturels pairs.
2. Trouver une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.25. On considère les applications f et g définies par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,x^2) \end{array}$$

Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. Le applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 3.26. On considère un entier $n \geqslant 2$, et un réseau de n ordinateurs. Chaque ordinateur est relié à aucun, un ou plusieurs autres ordinateurs du réseau. On considère que cette relation est symétrique : si un ordinateur A est relié à un ordinateur B, alors B est relié à A. Par contre, A n'est pas relié à lui-même.

Démontrer qu'il existe deux ordinateurs dans le réseau qui ont le même nombre de connexions (qui sont reliés au même nombre d'ordinateurs).

Exercice 3.27. $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, $F = \{0;1;2;3\}$. f est l'application de E dans F, qui à tout élément de E, associe son reste dans la division euclidienne par 3.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $A = \{1;3;4\}$, déterminer $f^{-1}(f(A))$. Est-ce que $f^{-1}(f(A)) = A$?
3. Soit $B = \{2;3\}$, déterminer $f\left(f^{-1}(B)\right)$. Est-ce que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$?

Exercice 3.28. $E = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. On définit les applications f et g de E dans E de la façon suivante :

- $\forall x \in E$, $f(x)$ est le reste de la division euclidienne de $3x+2$ par 7.
- $\forall x \in E$, $g(x)$ est le reste de la division euclidienne de $4x+2$ par 7.

1. Remplir le tableau :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							
$g(x)$							
$g \circ f(x)$							

2. Expliquer pourquoi on peut définir les applications réciproques de f, de g et de $g \circ f$.
3. Que vaut $(g \circ f)^{-1}(6)$? Calculer $f^{-1} \circ g^{-1}(6)$. Le résultat était-il prévisible ?

Exercice 3.29. Pour s'échanger des messages codés, Alice et Bob utilisent leur clavier téléphonique. Le chiffre 2 sert à coder les lettres A, B, C ; le chiffre 3 sert à coder les lettres D, E, F, etc.

1. Quel nombre Alice va-t-elle envoyer à Bob pour lui dire BRAVO ?
2. Bob est-il sûr de comprendre ?
3. Quelle propriété de l'application : lettre $\mapsto$ chiffre n'est pas respectée, qui permettrait de décoder le message de façon certaine ?
4. Proposer une adaptation de la méthode permettant d'avoir un décodage unique.

Exercice 3.30.

1. Pour un certain type de codage, on a besoin de coder les lettres A, B, C, D. On commence par attribuer un nombre à chaque lettre : A= 0, B= 1, C= 2, D= 3. Puis on multiplie par 2 le nombre et on ajoute 3. On cherche ensuite le reste de la division euclidienne par 4. À ce reste correspond alors une lettre qui est la lettre cryptée. Comment seront cryptées les lettres A, B, C, D ? Ce type de codage est-il acceptable ?
2. La méthode précédente n'étant pas satisfaisante, on décide de modifier le procédé. On multiplie par 3 le nombre et on ajoute 2. Et on cherche encore le reste de la division euclidienne par 4. Vérifier que l'on a un codage bijectif.