

10.4 Exemples de lois à densité

Exercice 10.14. Les cibles : choisir un nombre dans $[0; 1]$.

Un jeu consiste à lancer une fléchette sur des cibles dont la forme est donnée dans chaque cas par le domaine de plan coloré, situé au-dessus du segment représentant l'intervalle $[0; 1]$, et dont l'aire totale est égale à 1 unité d'aire.

On suppose que la fléchette atteint toujours sa cible, et on appelle x l'abscisse du point d'impact P .

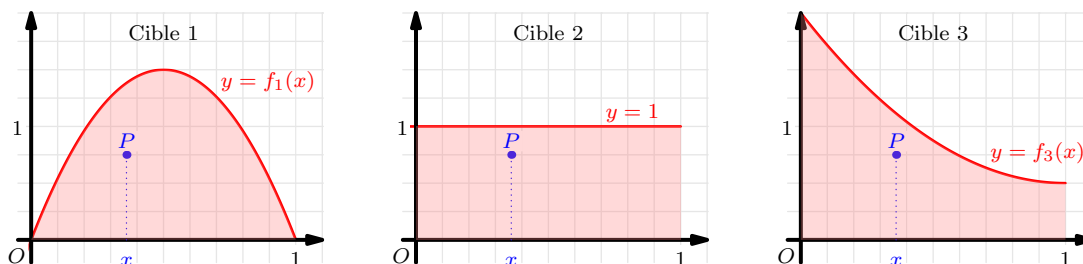
Pour un intervalle J inclus dans $[0; 1]$, on étudie ci-dessous la probabilité de l'événement $\{x \in J\}$ pour chaque cible.

- Le lanceur gagne lorsque x appartient à l'intervalle $[0; 0,2]$.
 - Avec quelle cible le lanceur a-t-il apparemment le plus de chance de gagner ?
 - Par lecture graphique, conjecturer la valeur exacte de la probabilité p_2 de gagner avec la cible 2.
 - Proposer un principe de calcul pour les probabilités p_1 et p_3 de gagner avec les cibles 1 et 3.
- Le bord supérieur du domaine est, pour chaque cible, la courbe d'une fonction dont on donne l'expression :

$$f_1 : x \mapsto 6x(1-x) \quad ; \quad f_2 : x \mapsto 1 \quad ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}.$$

- Conjecturer pour quelle cible l'événement $\{0,3 \leq x \leq 0,7\}$ est le plus probable.
- En utilisant le calcul intégral, déterminer pour chaque cible la probabilité de l'événement $\{0,3 \leq x \leq 0,7\}$ et retrouver la conjecture faite au 2.a.

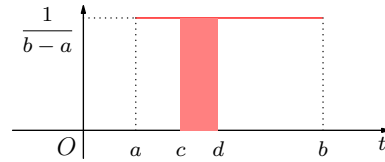
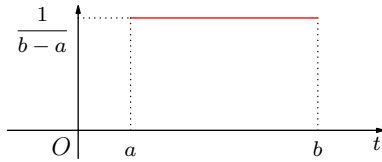
Bilan : chaque cible permet de modéliser le choix d'un réel x de l'intervalle $[0; 1]$ en définissant la probabilité des événements $\{x \in J\}$, pour tout intervalle J inclus dans $[0; 1]$. La fonction dont la courbe est le bord supérieur de la cible est appelée **densité de la loi de probabilité** ainsi définie sur $[0; 1]$. On voit dans cette activité que la probabilité d'un même intervalle J varie selon la densité considérée.



10.4.1 Loi uniforme sur $[a, b]$.

Exemple : On choisit au hasard un nombre réel dans $[0; 1]$. L'intervalle contenant une infinité de nombres, la probabilité que le nombre choisi soit par exemple 0,7 est nulle. Par contre, il semble cohérent d'écrire : « la probabilité que le nombre choisi appartienne à $[0,1; 0,3]$ vaut 0,2 ».

Définition 24. On choisit au hasard un nombre réel dans $[a; b]$. La probabilité qu'il appartienne à un intervalle $[c; d]$ inclus dans $[a; b]$ vaut $P([c; d]) = \frac{d-c}{b-a}$. P est appelée la loi uniforme sur $[a; b]$. C'est la loi de densité $f : t \mapsto \frac{1}{b-a}$.



On peut s'amuser à écrire que :

$$P([c; d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dt$$

Remarques :

1. C'est une loi de probabilité comme les autres. Pour $[a; b] = [0; 1]$, $P([0; 1]) = 1 \dots$; on peut définir des probabilités conditionnelles :

$$P_{[0;0,5]}([0,1;0,2]) = \frac{P([0;0,5] \cap [0,1;0,2])}{P([0;0,5])} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

2. Pour tout nombre réel x de $[a; b]$: $P(x) = P([x; x]) = \frac{x-x}{b-a} = 0$. Ainsi, le sens des crochets n'a pas d'importance.

Propriété 12. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Son espérance est

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance est :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration.

$$E(x) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_a^b = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2}$$

□

Exercice 10.15. M. Lettré achète son journal de l'après-midi du lundi au vendredi entre 16h et 16h30 au kiosque devant son domicile. L'heure d'achat du journal suit une loi uniforme sur l'intervalle $[16; 16,5]$.

1. Quelle est la densité définissant la loi de probabilité pour l'heure d'achat du journal ?
2. (a) Lundi midi : quelle est la probabilité que M. Lettré achète son journal entre 16h20 et 16h30 ?
(b) Vendredi, 16h15 : le gérant du kiosque n'a pas encore vu M. Lettré. Quelle est la probabilité que celui-ci achète son journal entre 16h20 et 16h30 ?
(c) Mercredi, 15h : à quelle heure le gérant peut-il « espérer » voir M. Lettré ?

10.4.2 Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ .

Le mathématicien français Émile Borel (1877-1956) donne les conditions de réalisation d'une distribution normale : « Lorsque la réalisation d'une variable quantitative X est sous la dépendance d'une cause prépondérante constante, et d'un ensemble de causes perturbatrices secondaires nombreuses et indépendantes, et dont les effets sont additifs,

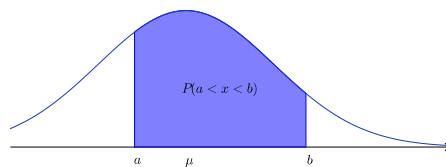
petits, symétriques et aléatoires, la distribution de cette variable tend vers la loi normale et l'approximation est d'autant meilleure que le nombre de causes secondaires est grand. »

On la rencontre par exemple lorsqu'on mesure de nombreuses fois une même grandeur (en commettant des petites erreurs diverses). La distribution des mesures suit la fameuse courbe en cloche, ou courbe de Gauss.

Définition 25. Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si sa fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

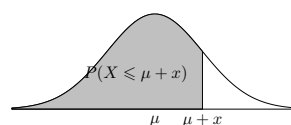
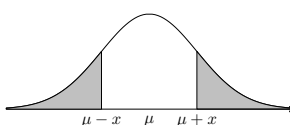
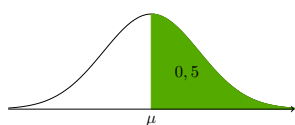
Pour tous réels a et b ($a < b$) on a : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.



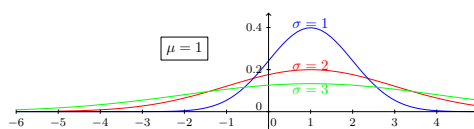
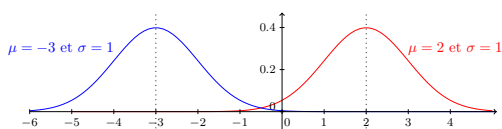
Remarque : la formule de la fonction n'est pas à retenir ; la calculatrice nous donnera le résultat de l'intégrale.

Propriété 13. — l'aire totale sous la courbe de f est égale à 1 ;

- la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$;
- $P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$ c'est à dire que l'aire sous la courbe sur $[\mu; +\infty[$ est $\frac{1}{2}$;
- Pour tout réel x , $P(X \leq \mu - x) = P(X \geq \mu + x) = 1 - P(X \leq \mu + x)$.

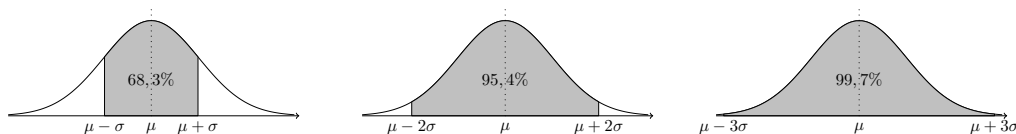


Exemples :



Propriété 14 (Intervalles à 1, 2 ou 3 sigmas). Si X suit (μ, σ) ,

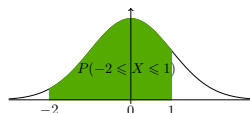
- $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \simeq 0,683$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \simeq 0,954$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \simeq 0,997$



Loi normale centrée réduite : c'est la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1. On peut y ramener toutes les lois normales : lorsqu'une variable aléatoire X a une espérance μ et un écart-type σ , alors la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ a pour espérance 0 et pour écart-type 1. Z est appelée *variable centrée réduite* associée à X .

Exemple 1. Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.

$$P(-2 < X < 1) \simeq 0,819$$



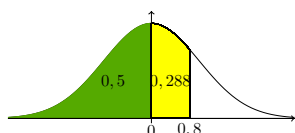
Calculatrices :

- Casio Graph35+ : MENU STAT DIST NORM Ncd. Dans Data, choisir Variable. Puis Lower = -2, Upper = 1, $\sigma = 1$, $\mu = 0$.
- TI82Stats.fr : 2nde distrib normalFrép (ou normalcdf sur les modèles en anglais)

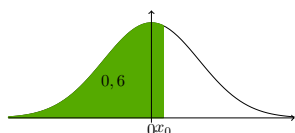
$$\text{normalFRép}(-2, 1, \underbrace{0}_{\mu}, \underbrace{1}_{\sigma})$$

Exemple 2. Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.

$$P(X < 0,8) = 0,5 + P(0 < X < 0,8) \simeq 0,788$$



Exemple 3. Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite. Calculons x_0 tel que $P(X \leq x_0) = 0,6$. On trouve $x_0 \simeq 0,253$.



Calculatrices :

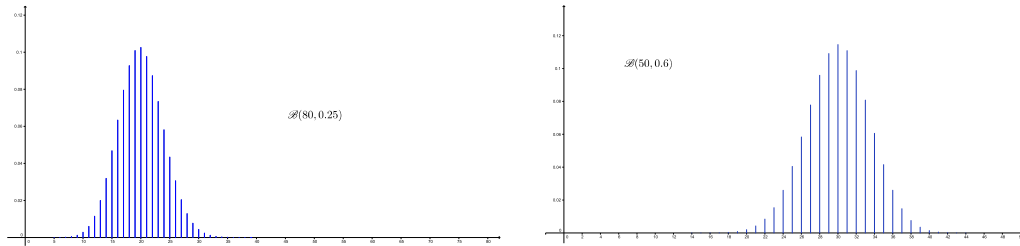
- Casio Graph35+ : MENU STAT DIST NORM InvN. Dans Data, choisir Variable. Puis Tail = *Left*, Area = 0,6, $\sigma = 1$, $\mu = 0$.
- TI82Stats.fr : 2nde distrib FracNormale (ou Invnorm sur les modèles en anglais)

$$\text{FracNormale}(0,6, \underbrace{0}_{\mu}, \underbrace{1}_{\sigma})$$

10.4.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Allure générale des lois binomiales

Les diagrammes en bâtons représentant les lois binomiales ont tous la même forme :

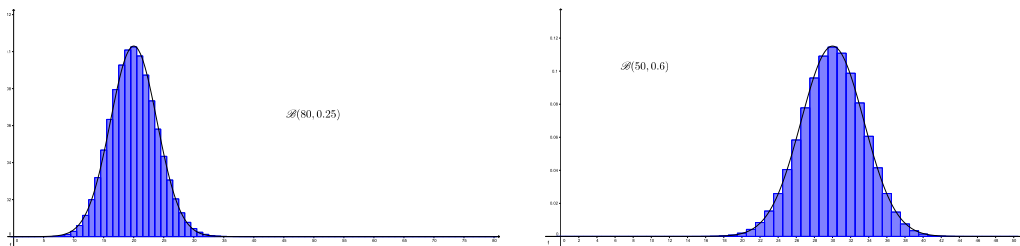


En ordonnées, on lit $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, k étant le nombre de succès comptés par la variable aléatoire X .

La probabilité maximale de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ semble obtenue pour l'espérance $k = np$.

Passage au continu : des diagrammes en bâtons aux histogrammes

La somme des hauteurs des bâtons ci-dessus valait 1. Afin de faire apparaître une loi à densité, on passe à des rectangles jointifs¹ d'aire totale égale à 1 :



Les aires des rectangles donnent les probabilités.

Les bords supérieurs des rectangles font apparaître une courbe régulière et symétrique. Les mathématiciens Abraham de Moivre et Laplace ont montré au XVIII^e siècle que la courbe qui apparaît comme enveloppe des histogrammes est celle de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On retiendra :

Une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut, dans certaines conditions (quand n est grand, p pas trop près de 0 et 1 ...), être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de même espérance et de même écart-type : $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Exemples : ci-dessus, on a observé que la loi binomiale $\mathcal{B}(80; 0,6)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$, avec $\mu = 80 \times 0,6 = 48$ et $\sigma = \sqrt{80 \times 0,6(1-0,6)} \simeq 4,38$

Intérêt : le calcul des $\binom{n}{p}$ pour de grandes valeurs est difficile avec une calculatrice et évaluer $P(X \leq 1050)$ pour $\mathcal{B}(5000; 0,2)$ est très pénible. Il est préférable d'utiliser la loi normale ...

1. On remplace un bâton sans épaisseur à l'abscisse k par un rectangle de largeur 1 située entre les abscisses $k - \frac{1}{2}$ et $k + \frac{1}{2}$: on dit qu'on réalise une « correction de continuité ».