Exercices sur la loi normale

Exercice 10.16. X suit une loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,5. À l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

a. $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

b. $P(0 \leqslant X)$

c. $P(X \leqslant 2)$

Exercice 10.17. Dans une usine, des poudriers sont remplis d'une poudre cosmétique. On considère que la masse de la poudre suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type 1,1. La valeur de μ dépend du réglage de la machine. Les flacons sont étiquetés comme contenant 100 mg de produit.

1. La machine est réglée sur $\mu = 100$ mg. Quelle est la probabilité pour que la masse de la poudre soit inférieure à 100 mg ?
2. Sur quelle valeur de μ faut-il régler la machine pour qu'au moins 96% des flacons aient une masse supérieure ou égale à 100 mg ?
3. Même question si on souhaite obtenir 99% des flacons.

Exercice 10.18. Le grand mathématicien Henri Poincaré (1854-1912) avait l'habitude d'acheter tous les jours un pain de 1 kg chez son boulanger. Il s'était aperçu que sur une période de 6 mois, tous les pains achetés pesaient moins de 900 g. Après s'être plaint au boulanger, il avait constaté que durant les six mois suivants, tous les pains pesaient plus de 1 kg. Il était finalement revenu voir le boulanger pour lui dire qu'il était décidément un incorrigible tricheur.

On suppose que le poids réglementaire du pain, en kg, suit une distribution normale de loi $\mathscr{N}(1;\sigma^2)$.

1. Le boulanger assure que 95% de ses pains pèsent entre 0,9 kg et 1,1 kg.
   (a) En déduire une valeur approchée de σ.
   (b) En déduire la probabilité qu'un pain pèse moins de 0,9 kg, puis la probabilité que pendant six mois, tous les pains pèsent moins de 0,9 kg.
2. Avec les mêmes hypothèses, déterminer la probabilité pour qu'un pain pèse plus de 1 kg, puis la probabilité que tous les pains pendant six mois pèsent plus de 1 kg.

Exercice 10.19. Une compagnie aérienne utilise un avion pouvant transporter 400 passagers. Pour un vol donné, la probabilité pour qu'un passager ne se présente pas à l'embarquement est de 0,08.

1. La compagnie accepte 410 réservations. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de passagers se présentant effectivement.
   (a) Quelle est la loi de X, si on suppose que les comportements des passagers sont indépendants ?
   (b) Justifier que l'on peut approximer la loi de X par une loi normale dont on indiquera les paramètres.
   (c) En déduire une approximation de $P(X > 400)$. Comment interpréter ce résultat ?
2. La compagnie décide d'optimiser le surbooking de la façon suivante : elle vend le plus grand nombre n de places possibles tel que le nombre de passagers se présentant à l'embarquement vérifie : $P(X_n > 400) \leqslant 0{,}025$.
   (a) En approximant la loi de X_n par une loi normale et en utilisant les seuils établis dans le cours, déterminer une équation vérifiée par n.
   (b) Déterminer n.

Exercice 10.20. Exercice 1 de l'épreuve de 2015, métropole

Les trois parties **A, B** et **C** peuvent être traitées de manière indépendante.

Une entreprise d'envergure internationale produit des composants pour ordinateurs portables, notamment des batteries et des écrans.

Partie A Au cours de la production, les batteries peuvent présenter, de façon indépendante, deux défauts principaux, notés a et b. On considère qu'une batterie produite est défectueuse lorsqu'elle comporte au moins l'un des défauts a ou b.

On prélève une batterie au hasard dans la production d'une journée. La probabilité que le défaut a apparaisse est égale à 0,02, celle que le défaut b apparaisse est égale à 0,01.

On note A l'évènement « le défaut a apparaît », et B l'évènement « le défaut b apparaît ».

1. (a) Justifier l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
   (b) Calculer la probabilité qu'une batterie produite soit défectueuse. On arrondira le résultat à la quatrième décimale.
2. On prélève au hasard dans la production un lot de 100 batteries. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage aléatoire avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 batteries, associe le nombre de batteries défectueuses détectées.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer $P(X \geqslant 3)$, en arrondissant à la quatrième décimale. Interpréter le résultat.

Partie B On s'intéresse maintenant à la durée de charge de ces batteries.

On prélève au hasard une batterie dans la production, et l'on note Y la variable aléatoire qui modélise le temps de charge, en minute, de cette batterie.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $m = 80$ et $\sigma = 10$.

1. Calculer la probabilité $P(60 \leqslant Y \leqslant 100)$. On arrondira le résultat à la quatrième décimale.
2. Déterminer le réel h, arrondi à la deuxième décimale, tel que $P(Y \geqslant h) = 0{,}95$.

   Formuler une interprétation de ce résultat.

Partie C

La durée de bon fonctionnement d'un écran, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Le temps moyen de bon fonctionnement des écrans est de 1 900 jours.

1. En arrondissant à la quatrième décimale,justifier que λ s'exprime en jour^{-1} par : $\lambda = 0{,}000\,5$.
2. Quelle est la probabilité que l'écran fonctionne encore correctement après 4 000 jours d 'utilisation ? On arrondira le résultat à la quatrième décimale.
3. Déterminer le réel t tel que $P(T \leqslant t) = 0{,}7$. On donnera la valeur de t arrondie à l'entier.

   Interpréter le résultat obtenu.

BTS SIO 2017. Exercice 1 (10 points)

Cet exercice envisage plusieurs études réalisées par une société qui pratique des sondages auprès de ses clients. Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1

La société pratique les sondages par courriel, et a recueilli les données suivantes au cours de cinq campagnes de sondage.

Nombre de clients contactés : x	200	200	250	280	370
Nombre de sondages renvoyés : y	140	135	160	185	260

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y, arrondi au centième.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au centième.
3. La société souhaite recevoir davantage de sondages, en contactant un plus grand nombre de clients.
   En utilisant l'ajustement affine trouvé à la question précédente, estimer le nombre de sondages qui seront renvoyés si la société contacte 500 clients, en arrondissant ce nombre à la dizaine.

Partie 2

La société réalise un sondage auprès d'utilisateurs d'internet. On considère une personne choisie au hasard dans la population des sondés.

On définit les événements suivants :

A : « la personne utilise internet depuis 5 ans ou plus » ;

B : « la personne répond au sondage ».

Les statistiques de la société permettent de dégager les faits suivants :

- 75 % de la population des personnes sondées utilisent internet depuis 5 ans ou plus ;
- si une personne sondée utilise internet depuis 5 ans ou plus, la probabilité qu'elle réponde au sondage est égale à 0,6 ;
- si une personne sondée utilise internet depuis strictement moins de 5 ans, la probabilité qu'elle réponde au sondage est égale à 0,3.

1. Présenter la situation de l'énoncé à l'aide un arbre pondéré, que l'on complètera.
2. Calculer $P\left(\overline{A} \cap B\right)$, puis $P(B)$ en détaillant les calculs.
3. Calculer $P_B(A)$, en arrondissant au millième.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie 3

1. La société étudie le temps mis par les personnes pour renseigner le questionnaire relatif à un sondage donné. Elle modélise ce temps, exprimé en minute, par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 12,5 et d'écart type 1,8.
   (a) Donner un arrondi au dixième du nombre a tel que
   $P(12{,}5 - a \leqslant T \leqslant 12{,}5 + a) = 0{,}95$.

(b) Calculer $P(T \geqslant 15)$, en arrondissant au centième.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. La société remarque que 20 % des personnes qui répondent aux sondages renseignent le questionnaire de façon incomplète, et rendent de ce fait le sondage incomplet. De plus les personnes qui renseignent un questionnaire le font indépendamment les unes des autres.

   Pour un sondage donné, la société considère les 2 000 premières réponses reçues, et modélise le nombre de sondages incomplets par une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

   (a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

   (b) Calculer la probabilité que le nombre de sondages incomplets soit inférieur ou égal à 385, en arrondissant le résultat au centième.