Chapitre 10

Probabilités 1

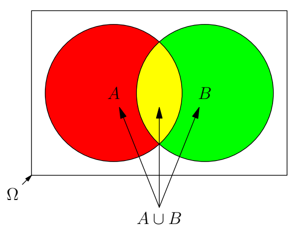
10.1 Rappels

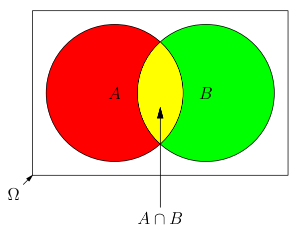
10.1.1 Vocabulaire

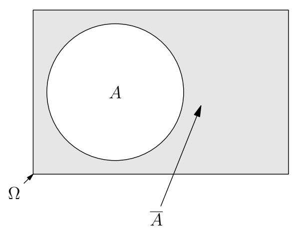
Un *événement* est un fait pouvant être réalisé ou ne pas être réalisé par une expérience.
L'*univers* Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles lors d'une expérience aléatoire.
Un événement est ainsi une partie de l'univers.
Un *événement élémentaire* est un événement possédant un seul élément.

La *réunion* $A \cup B$ des événements A et B, notée aussi A ou B, contient tous les éléments de A ou de B.

L'*intersection* $A \cap B$, notée aussi A et B, contient tous les éléments présents à la fois dans A et dans B.







10.1.2 Loi de probabilité

Aux événements, on associe un nombre qui est d'autant plus grand que la possibilité de réalisation est plus élevée et on l'appelle *probabilité de l'événement*. On fixe à 0 la probabilité d'un événement impossible et à 1 la probabilité d'un événement certain.

La probabilité d'un événement est la valeur vers laquelle tend la *fréquence* relative d'apparition de cet événement quand le nombre d'expériences devient très grand.

$$\boxed{P(\Omega) = 1} \qquad \boxed{P(\emptyset) = 0}$$

Ainsi, pour tout événement A de Ω : $\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}$

Pour un univers fini $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, la *loi de probabilité* est la liste des probabilités des éléments de Ω : $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Exemple : pour le dé à 6 faces équilibré, la loi de probabilité P est

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

$$\boxed{P(A) = \sum_{i \text{ tel que } x_i \in A} p_i}$$

Exemple du dé : la probabilité de l'événement A : « obtenir une face paire » est

$$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0{,}5$$

Pour $A \subset \Omega$, la probabilité de l'événement contraire (complémentaire) $\overline{A}$ est

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

Pour des événements A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$) :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pour des événements A et B quelconques :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Dans le cas où les x_i sont des nombres :
L'*espérance de la loi* P est : $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
L'*écart-type de la loi* P est : $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2}$
La *variance de la loi* P est : $V = \sigma^2$

Dans le cas d'une loi équirépartie (on est en situation d'équiprobabilité quand on parle de *choix au hasard*, de dé *équilibré* ...), on a l'habitude de calculer la probabilité d'un événement A par

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

10.2 Conditionnement et indépendance

10.2.1 Probabilités conditionnelles

A et H sont des événements de Ω. La probabilité de H n'est pas nulle. La probabilité de A sachant H est :

$$\boxed{P_H(A) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}}$$

Formule des probabilités totales :
Les événements H_1, H_2, ..., H_n forment une partition de Ω (figure 10.1). Cela signifie que $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$ et que les H_i sont disjoints deux à deux. Alors pour tout événement A :

$$P(A) = P_{H_1}(A) \times P(H_1) + P_{H_2}(A) \times P(H_2) + \cdots + P_{H_n}(A) \times P(H_n)$$

On représente une telle situation à l'aide d'un arbre pondéré :

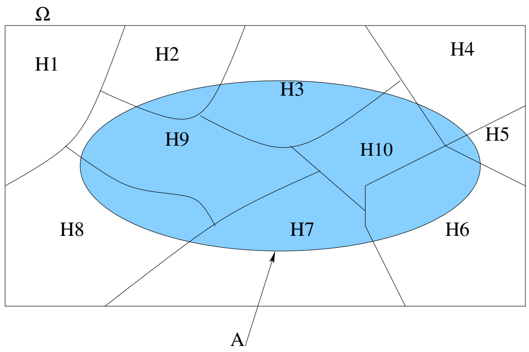
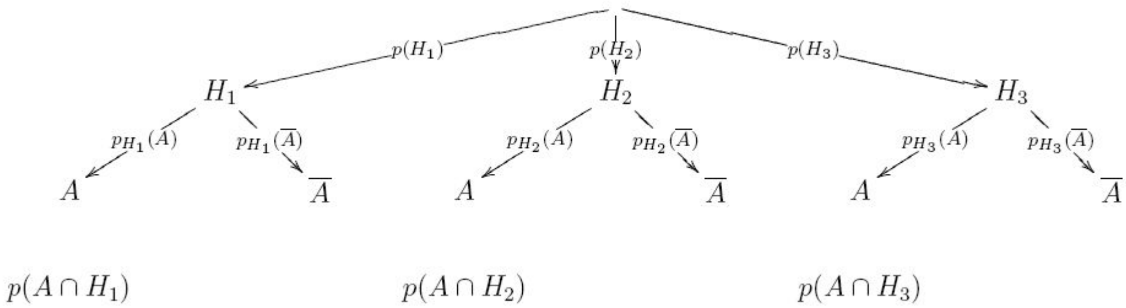


FIGURE 10.1 – Partition de l'univers



10.2.2 Evénements indépendants

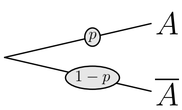
Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

10.3 Exemple de loi discrète

10.3.1 Loi de Bernoulli

Définition 23. Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues contraires A et $\overline{A}$.



Exemple : pile ou face, succès ou échec, sortie d'un six ou non avec un dé , ...
La loi de Bernoulli est donc, en notant $p = P(A)$:

A	$\overline{A}$
p	$1-p$

10.3.2 Loi binomiale

On répète n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes (où $P(A) = p$ et $P(\overline{A}) = 1-p$) . La loi binomiale de paramètres n et p est la loi du nombre d'apparitions de A.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de A. Pour tout entier k compris entre 0 et n, la probabilité d'obtenir k succès $P(X = k)$ est donnée par la calculatrice.

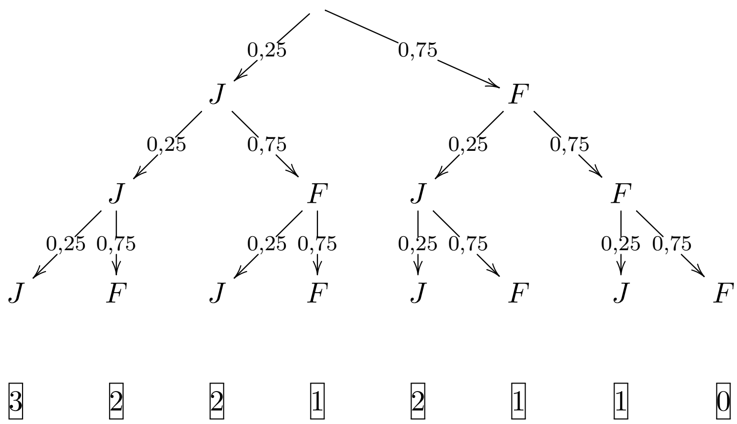
Propriété 11. On admet que l'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est np et que sa variance est $np(1-p)$.

Exemple : Un candidat doit remplir un Q.C.M. composé de trois questions. Pour chacune d'elles il est proposé quatre réponses possibles (dont une seule est correcte à chaque fois). On suppose que le candidat répond au hasard. Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre k de réponses correctes.

Chaque question correspond à une expérience de Bernoulli, où deux événements seulement sont possibles : J (réponse juste) et F (réponse fausse). $P(J) = 0{,}25$ et $P(F) = 0{,}75$.

Les trois expériences étant indépendantes (car le candidat répond au hasard), X suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,25.

On représente ceci sur un arbre pondéré :



k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

On doit seulement savoir trouver les probabilités à l'aide de la calculatrice.

Exemple de probabilité directe et de cumul.

Probabilités 1. Exercices

Exercice 10.1. Extrait de l'épreuve 2013.

Partie B

Dans cette partie, on arrondira les probabilités au millième.

Dans un lycée, le foyer des lycéens a dénombré les élèves utilisant l'internet mobile. La répartition de ces élèves est donnée dans le tableau suivant.

	Filles	Garçons	Total
Utilisent l'internet mobile	148	171	319
N'utilisent pas l'internet mobile	81	50	131
Total	229	221	450

1. On prélève au hasard une fiche dans le fichier des élèves du lycée. On admettra que toutes les fiches ont la même probabilité d'être prélevées.

   On note :

   G l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un garçon » ;

   M l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un élève utilisant l'internet mobile ».

   (a) Calculer la probabilité de prélever la fiche d'un garçon.

   (b) Montrer que la probabilité de prélever la fiche d'un garçon utilisant l'internet mobile est égale à 0,38.

   (c) Calculer la probabilité de prélever la fiche d'une fille, sachant que l'élève correspondant n'utilise pas l'internet mobile.

   (d) Calculer la probabilité $P_M(G)$ et interpréter le résultat.

2. On prélève au hasard et avec remise 40 fiches dans le fichier des élèves du lycée. On admettra que toutes les fiches ont la même probabilité d'être prélevées.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de garçons utilisant l'internet mobile parmi les fiches prélevées.

   (a) Montrer que la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}38$.

   (b) Calculer la probabilité $P(8 \leqslant X \leqslant 10)$.

3. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par celle d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale.

   (a) On choisit pour paramètres de la loi normale $m = 15{,}2$ et $\sigma = 3{,}1$.

   Justifier ce choix.

   (b) En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que, parmi les 40 fiches prélevées, le nombre de garçons utilisant l'internet mobile soit supérieur ou égal à 8 et inférieur ou égal à 10, c'est-à-dire calculer $P(7{,}5 \leqslant Y \leqslant 10{,}5)$.

   (c) Calculer $P(Y \geqslant 10{,}5)$. Interpréter ce résultat.

On donne ci-après deux tables de valeurs.

- Table de valeurs d'une variable aléatoire U qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}38$:

k	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(U = k)$	0,001 0	0,003 0	0,007 6	0,016 6	0,031 5	0,052 6	0,077 9	0,102 8

- Table de valeurs d'une variable aléatoire V qui suit la loi normale de paramètres $m = 15{,}2$ et $\sigma = 3{,}1$:

a	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5
$P(V \leqslant a)$	0,002 5	0,006 5	0,015 3	0,033 0	0,064 7	0,116 3

Exercice 10.2. D'après un magazine de santé, chaque année en France, 10 personnes pour 100 000 habitants sont diagnostiquées atteintes de la maladie de Crohn. Cette maladie se déclare dans 20% des cas par des symptômes similaires à ceux d'une gastro-entérite. On note C l'événement « la personne est diagnostiquée atteinte de la maladie de Crohn » et G l'événement « la personne a des symptômes similaires à ceux d'une gastro-entérite ». Calculer la probabilité de l'événement $C \cap G$. En donner une interprétation.

Exercice 10.3. Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants :

> « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1% des cas. »

On note :

- M l'événement « l'animal est malade » ;
- $\overline{M}$ l'événement contraire ;
- T l'événement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Exercice 10.4. Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules rouges. On tire successivement 2 boules au hasard dans l'urne, avec remise de la première boule. On s'intéresse aux trois événements suivants :

- A : « la première boule tirée est de couleur verte » ;
- B : « la deuxième boule tirée est de couleur verte » ;
- C : « les deux boules tirées sont de couleur verte ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Même question pour les événements A et C, puis pour les événements C et B.

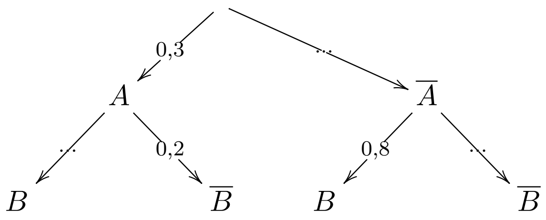
Exercice 10.5. Le foyer d'un lycée propose une activité sportive et une activité musicale tous les mercredis après-midi. Parmi les 540 élèves ce ce lycée, on sait que :

— 60 élèves participent à l'activité sportive et à l'activité musicale ;
— 160 élèves participent uniquement à l'activité sportive ;
— 460 élèves ne participent pas à l'activité musicale.

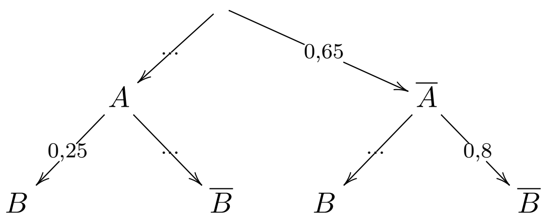
On interroge au hasard un élève de ce lycée. On note M l'événement « l'élève participe à l'activité musicale » et S l'événement « l'élève participe à l'activité sportive ».

1. Donner une interprétation de l'événement $\overline{S} \cap \overline{M}$. Préciser sa probabilité.
2. Les événements S et M sont-ils indépendants ?

Exercice 10.6. On note A et B deux événements d'une même expérience aléatoire modélisée par l'arbre pondéré ci-dessous. Compléter cet arbre. Les événements A et B sont-ils indépendants ?



Exercice 10.7. Mêmes questions avec l'arbre ci-dessous.



Exercice 10.8. Une chaîne de magasins estime que 30% de ses clients de 15-20 ans sont prêts à acheter un nouveau jeu. On contacte 120 clients potentiels de 15-20 ans. On admet que chacun d'eux a une probabilité de 0,3 d'être intéressé par ce jeu.

On note X la variable aléatoire associée au nombre k de clients intéressés parmi les 120. Calculer $P(X = 30)$ et $P(30 \leqslant X \leqslant 40)$. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 10.9. En France, 33% des personnes sont membres d'au moins une association. On interroge au hasard 400 personnes. Calculer la probabilité que 130 personnes exactement, parmi les 400 interrogées, soient membres d'au moins une association.

Exercice 10.10. En France, 80% des enfants de 2 à 5 ans sont scolarisés. Sur 150 enfants âgés de 2 à 5 ans pris au hasard, calculer la probabilité qu'exactement 125 d'entre eux soient scolarisés.

Exercice 10.11. L'intéressement est une mesure qui vise à associer les salariés aux résultats ou performances d'une PME, en leur versant une prime. Dans l'entreprise Marion, la moitié des salariés reçoit une prime d'intéressement.

On interroge au hasard 80 salariés de cette entreprise. On appelle X la variable aléatoire associée au nombre de salariés, parmi les 80 interrogés, qui perçoivent la prime dans cette PME.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au plus 45 des salariés interrogés reçoivent cette prime ? En déduire $P(X > 45)$.