

Contrôle de mathématiques**Exercice 1**

Une agence de voyage de la zone euro propose un circuit touristique pour visiter les 3 villes A, B et C. Le client peut choisir la durée du séjour dans chaque ville. L'agence distingue deux périodes, la haute et la basse saison, et différencie ses tarifs selon la période.

Les tarifs journaliers dans les différentes villes, en centaines d'euro par personne, sont donnés dans le tableau suivant. L'euro est noté €.

	Ville A	Ville B	Ville C
Nombre de jours	1	1	1
Tarif haute saison	2	2,5	1,5
Tarif basse saison	1	2	1

On note P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Monsieur Martin a choisi un circuit qui comprend 3 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 5 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le produit matriciel $P \times M$. Que représentent les termes de la matrice obtenue ?

- (b) Monsieur Martin dispose de 1 500 €. Pourra-t-il réaliser son voyage ?

2. On considère la matrice $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et on note I la matrice unité :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le produit matriciel $Q \times P$.

- (b) Soient X et Y deux matrices colonnes quelconques à 3 lignes et 1 colonne. Montrer que, si $P \times X = Y$, alors $X = Q \times Y$.

3. Dans une publicité, l'agence de voyage affirme qu'un circuit complet de 12 jours est possible au tarif de 2 250 € en haute saison et 1 400 € en basse saison.

Comment se compose ce circuit, en nombre de jours dans chacune des villes ?

Exercice 2

Les parties A et B étudient deux éléments d'un jeu vidéo. Elles sont indépendantes.

Partie A

Le jeu vidéo comprend un coffre-fort. Son ouverture dépend de trois paramètres : une clé que doit trouver le joueur, une énigme à résoudre, le temps écoulé (donné par un chronomètre).

Le coffre s'ouvre si l'une au moins des conditions suivantes est réalisée :

- l'énigme est résolue et le joueur a trouvé la clé, ou
- le joueur a trouvé la clé et le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes, ou
- le chronomètre marque plus de 30 minutes.

On définit trois variables booléennes a , b , c de la manière suivante :

- $a = 1$ si le joueur a trouvé la clé, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si l'énigme est résolue, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes, $c = 0$ sinon.

1. Écrire une expression booléenne E qui traduit les critères d'ouverture du coffre-fort.
2. (a) Représenter l'expression E dans un tableau de Karnaugh.
(b) En déduire une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.
(c) Interpréter cette expression simplifiée dans le contexte de l'exercice.
3. Donner une écriture simplifiée de $\overline{E}$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour passer un niveau dans le jeu, il faut taper sur un clavier un code de 6 caractères comprenant des lettres et des chiffres. Le joueur peut trouver ces caractères en résolvant trois énigmes numériques, qui sont décrites dans les questions 1, 2, 3.

1. Le caractère de gauche du code est le nombre de diviseurs positifs de 2019. Cette question détaille la détermination de ce nombre.
(a) Justifier le fait que 673 est un nombre premier.
(b) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 2019.
(c) Déterminer tous les diviseurs positifs de 2019. En déduire le nombre cherché.
2. Les 2^e, 3^e et 4^e caractères du code en partant de la gauche sont, dans cet ordre, les chiffres de l'écriture hexadécimale du nombre 2019.
Trouver ces caractères en détaillant les calculs.
3. Cette question détaille la détermination des deux derniers caractères du code.
(a) Déterminer les restes possibles de la division de $n^2 + n + 1$ par 7 en fonction des restes possibles de la division de n par 7.
On pourra pour cela recopier et compléter le tableau suivant :

Reste possible de la division de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste possible de la division de n^2 par 7							1
Reste possible de la division de $n^2 + n + 1$ par 7							1

- (b) On peut lire dans le tableau ci-dessus, après l'avoir complété, que les entiers de la forme $7k + 2$, avec k entier naturel, sont des solutions de l'équation $n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

Donner les autres solutions sous une forme analogue.

- (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ qui sont comprises entre 0 et 101.

Les deux derniers caractères à droite sont, dans cet ordre, les chiffres en base dix de ce nombre de solutions.

4. Choisir sans justification la bonne réponse.

Le code à taper pour passer le niveau du jeu est :

Réponse A : 43E730

Réponse B : 47E329

Réponse C : 33E729

Réponse D : 27E330

Exercice 3

1. On considère une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E . Indiquer dans chaque cas suivant si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive et si c'est une relation d'équivalence. Justifier les réponses.

- (a) E est l'ensemble des habitants de Nantes, et $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y \text{ signifie que } x \text{ et } y \text{ ont la même mère.}$$

- (b) E est l'ensemble des habitants de Nantes, et $\mathcal{R}$ est la relation définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y \text{ signifie que } y \text{ est un ancêtre de } x.$$

2. E est l'ensemble des habitants de Nantes. Définir une relation binaire sur E qui soit une relation d'ordre total. Justifier le choix.

Corrigé du contrôle de mathématiques

Exercice 1

	Ville A	Ville B	Ville C
Nombre de jours	1	1	1
Tarif haute saison	2	2,5	1,5
Tarif basse saison	1	2	1

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Monsieur Martin a choisi un circuit qui comprend 3 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 5 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) $P \times M = \begin{pmatrix} 10 \\ 18,5 \\ 12 \end{pmatrix}$

10 : le séjour de Monsieur Martin durera 10 jours ;

il coûtera 1 850€ en haute saison

et 1 200€ en basse saison.

- (b) Monsieur Martin dispose de 1 500 €. Il pourra réaliser son voyage mais seulement en basse saison.

2. (a) $Q \times P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (b) Soient X et Y deux matrices colonnes quelconques à 3 lignes et 1 colonne.
Si

$$P \times X = Y$$

alors

$$\underbrace{Q \times P}_I \times X = Q \times Y$$

$$I \times X = Q \times Y$$

$$X = Q \times Y$$

3.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 22,5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Un circuit complet de 12 jours est possible au tarif de 2 250 € en haute saison et 1 400 € en basse saison est possible : 5 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 5 jours dans la ville C.

Exercice 2

Partie A

- « L'énigme est résolue et le joueur a trouvé la clé » se traduit par $a.b$
 - « Le joueur a trouvé la clé et le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes » se traduit par $a.c$
 - « Le chronomètre marque plus de 30 minutes » se traduit par $\bar{c}$.

L'expression booléenne qui traduit la disjonction de ces trois critères d'ouverture du coffre-fort est

$$E = a.b + a.c + \bar{c}$$

- (a) Le tableau de Karnaugh de E est

$E:$

	ab		a	
c	000	010	110	100
	1	1	1	1
c	001	011	111	101
	0	0	1	1
			b	

- (b) On peut alors simplifier l'expression booléenne E :

$$E = \bar{c} + a$$

- (c) Le coffre-fort s'ouvre si

- le chronomètre marque plus de 30 minutes

ou

- le joueur a trouvé la clé.

3. $\overline{E} = c.\bar{a}$ (à l'aide des zéros du tableau)

Autre méthode, par calcul :

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \overline{\bar{c} + a} \\ &= c.\bar{a}\end{aligned}$$

Le coffre reste fermé si

- le chronomètre marque strictement moins de 30 minutes

et

- le joueur n'a pas trouvé la clé.

Partie B

- 673 est un nombre premier car il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{673} \approx 25,9$ (on a essayé 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23).
 - La décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 2019 est

$$2019 = 3 \times 673$$

(c) Les diviseurs positifs de 2019 sont $\boxed{1; 3; 673; 2019}$.

Le nombre cherché est le nombre de ces diviseurs : c'est $\boxed{4}$.

2. L'écriture hexadécimale du nombre 2019 est 7E3 car

$$7 \times 16^2 + 14 \times 16 + 3 = 2019$$

Les 2^e, 3^e et 4^e caractères du code sont $\boxed{7E3}$.

3. (a) Les restes possibles de la division de $n^2 + n + 1$ par 7 en fonction des restes possibles de la division de n par 7.

Reste possible de la division de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste possible de la division de n^2 par 7	0	1	4	2	2	4	1
Reste possible de la division de $n^2 + n + 1$ par 7	1	3	0	6	0	3	1

Explication pas demandée (pour la dernière colonne) : si $n \equiv 6 \pmod{7}$, alors

$$n^2 \equiv 6^2 \pmod{7}$$

Comme $36 \equiv 1 \pmod{7}$, on a

$$n^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

En ajoutant les trois membres de gauche et les trois membres de droite de

$$n \equiv 6 \pmod{7}$$

$$n^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1 \equiv 1 \pmod{7}$$

on obtient

$$n^2 + n + 1 \equiv 6 + 1 + 1 \pmod{7}.$$

Comme $8 \equiv 1 \pmod{7}$

$$n^2 + n + 1 \equiv 1 \pmod{7}$$

(b) On peut lire dans le tableau ci-dessus que les entiers de la forme $7k + 2$, avec k entier naturel, sont des solutions de l'équation $n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$. En effet, dans la 3^e colonne, les entiers n sont congrus à 2 modulo 7.

Les autres solutions sont les entiers n congrus à 4 modulo 7. Ils sont de la forme $\boxed{7k + 4}$, avec k entier naturel.

(c) $7k + 2$ est compris entre 0 et 101 pour k entre 0 et 14, ce qui fait 15 valeurs possibles.

$7k + 4$ est compris entre 0 et 101 pour k entre 0 et 13, ce qui fait 14 valeurs possibles.

L'équation $n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ admet donc $\boxed{29}$ solutions comprises entre 0 et 101.

4. La bonne réponse est donc la $\boxed{\text{réponse B : 47E329}}$.

Exercice 3

1. E est l'ensemble des habitants de Nantes, et $\mathcal{R}$ est définie par :

$\forall (x,y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y$ signifie que x et y ont la même mère.

- $\mathcal{R}$ est réflexive. Explication :

$$\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$$

puisque x a la même mère que lui-même.

- $\mathcal{R}$ est symétrique. Explication :

$$\forall (x,y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

En effet, si x a la même mère que y , alors y a la même mère que x (ils ont tous deux la même mère).

- $\mathcal{R}$ est transitive. Explication :

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E \quad (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

En effet, si x a la même mère que y et si y a la même mère que z , alors x a la même mère que z .

- $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car elle est réflexive, symétrique et transitive.

2. E est l'ensemble des habitants de Nantes, et $\mathcal{R}$ est la relation définie par :

$\forall (x,y) \in E \times E \quad x\mathcal{R}y$ signifie que y est un ancêtre de x .

- $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive car un habitant de Nantes n'est pas ancêtre de lui-même.
- $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique : si y est un ancêtre de x , alors x ne peut pas être un ancêtre de y .
- $\mathcal{R}$ est transitive. Explication :

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E \quad (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

En effet, si y est un ancêtre de x et si z est un ancêtre de y , alors z est un ancêtre de x .

- $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas réflexive.

3. E est l'ensemble des habitants de Nantes. Une relation binaire sur E qui soit une relation d'ordre total peut être la relation « a le même âge ou est plus vieux que ».

Elle est bien réflexive (grâce à « a le même âge »), antisymétrique et transitive. L'ordre est total : sur les deux phrases « x a le même âge ou est plus vieux que y » et « y a le même âge ou est plus vieux que x », au moins une des deux est vraie (on peut comparer les âges de deux habitants quelconques de Nantes).