

Contrôle de mathématiques**Exercice 1**

Le spam, courriel indésirable ou pourriel, est une communication électronique non sollicitée, en premier lieu via le courrier électronique. Il s'agit en général d'envois en grande quantité effectués à des fins publicitaires.

Un étudiant en BTS SIO a développé un logiciel anti spam. Le filtre mis en place par l'étudiant se base sur les trois variables booléennes suivantes :

- a : l'objet du message contient au moins un terme douteux (gratuit, offre, promotion, gagner ...); $\bar{a}$: l'objet du message ne contient aucun terme douteux;
- b : le corps du message contient des images ou des hyperliens; $\bar{b}$: le corps du message ne contient ni images, ni hyperliens;
- c : les messages de l'expéditeur sont rarement lus; $\bar{c}$: les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment.

Avec ce logiciel, un courriel est considéré comme indésirable si :

- l'objet du message contient au moins un terme douteux avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens;
ou
- l'objet du message ne contient aucun terme douteux et les messages de l'expéditeur sont rarement lus;
ou
- les messages de l'expéditeur sont rarement lus et le corps du message ne contient ni images, ni hyperliens;

1. Traduire chaque condition par une expression booléenne en fonction des variables a , b et c puis déterminer l'expression booléenne E traduisant les conditions pour qu'un courriel soit considéré comme indésirable.
2. (a) Présenter E dans une table de Karnaugh.
(b) Un courriel, ayant comme objet « promotion : une réduction de 50 % ... » et dont les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment, peut-il être considéré comme indésirable? Justifier.
(c) En utilisant la table de Karnaugh, déduire l'expression simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes dont l'un est éventuellement un produit.
3. Traduire, en français, la règle pour considérer un courriel comme indésirable.
4. Donner une expression de $\bar{E}$.

Exercice 2

1. 899 est-il premier? Justifier la réponse.
2. (a) Donner la décomposition en produits de facteurs premiers de 1122.
(b) En déduire tous les diviseurs de 1122.
3. Donner la décomposition en produits de facteurs premiers du résultat de $365 \times 24 \times 3600$.
4. 512 et 2 sont-ils premiers entre eux? (éviter de répondre par oui ou non)
5. Déterminer le PGCD de 15000 et 2100, en montrant la méthode utilisée (la méthode « j'utilise la touche PGCD de la calculatrice » n'est pas acceptée).
6. Convertir

126 en base 2

$(1101011)_b$ en base 10

690 en base 16

$(B0B0)_h$ en base 2

$(11DA)_h$ en base 10

$(1010011)_b$ en base 16

(on ne demande pas de justification).

7. Donner le résultat en base 2, de $(111)_b \times (10000)_b$ (on ne demande pas de justification).

8. Compléter avec l'entier naturel le plus petit possible (on ne demande pas de justification) :

$$22 \equiv \dots \quad (3) \quad ; \quad 81 \equiv \dots \quad (9) \quad ; \quad 26 \equiv \dots \quad (10) \quad ; \quad 9^{9999} \equiv \dots \quad (1)$$

9. Donner cinq entiers naturels congrus à 7 modulo 5.

10. (a) i. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 1176 par 25.

ii. Traduire la question précédente à l'aide d'une congruence.

(b) i. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 22501 par 25.

ii. Traduire la question précédente à l'aide d'une congruence.

(c) Dédurre des questions précédentes le reste de la division euclidienne de $34 \times 1176^{500} + 22501^{100}$ par 25.

Exercice 3

Simplifier par le calcul les formules booléennes suivantes. On demande des détails et des calculs faciles à suivre!

1. $E = \overline{a + b} + a$

2. $F = a + \bar{a}.b + a.\bar{b}$

3. $G = (a.c + b).(a + b.\bar{b}.c)$

4. $H = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + \bar{a}.b + a.\bar{b}.\bar{c}$

Questions bonus

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2018^{2017} par 7.

2. Trouver un entier naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1, et divisé par 17 donne le même quotient et pour reste 13.

Corrigé du contrôle de mathématiques

Exercice 1

- « L'objet du message contient au moins un terme douteux avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens » se traduit par ab .
 - « L'objet du message ne contient aucun terme douteux et les messages de l'expéditeur sont rarement lus » se traduit par $\bar{a}c$.
 - « Les messages de l'expéditeur sont rarement lus et le corps du message ne contient ni images, ni hyperliens » se traduit par $\bar{b}c$.

L'expression booléenne E traduisant les conditions pour qu'un courriel soit considéré comme indésirable est

$$E = ab + c\bar{a} + \bar{b}c$$

- (a) Table de Karnaugh :

$E:$

ab		a			
		c			
c		000	010	110	100
		0	0	1	0
		001	011	111	101
		1	1	1	1
		b			

- (b) Un courriel, ayant comme objet « promotion : une réduction de 50 % ... » et dont les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment correspond à $a\bar{c}$.

Il peut être considéré comme indésirable, dans le cas où il contient aussi des images ou des hyperliens ($a\bar{c}b$).

- (c) L'expression simplifiée de E est

$$E = c + ab$$

- Un courriel est indésirable si
 - les messages de l'expéditeur sont rarement lus
 - ou si
 - l'objet du message contient au moins un terme douteux et le corps du message contient des images ou des hyperliens.
-

$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= \overline{c + ab} \\
 &= \bar{c} \cdot \bar{ab} \\
 &= \bar{c} \cdot (\bar{a} + \bar{b}) \\
 \bar{E} &= \bar{c} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot \bar{b}
 \end{aligned}$$

On peut lire cette expression directement dans le tableau (là où il y a des zéros) et répondre aussi $\bar{c} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot a$ ou $\bar{c} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$ ou encore $\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

Exercice 2

1. 899 n'est pas premier car il est divisible par 29 (et 31).
2. (a) La décomposition en produits de facteurs premiers de 1122 est

$$1122 = 2 \times 3 \times 11 \times 17$$

Calculs :

$$\begin{array}{r|l} 1122 & 2 \\ 561 & 3 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \end{array}$$

- (b) On en déduit les 16 diviseurs de 1122 en prenant les facteurs un par un, deux par deux ...
 - 2 ; 3 ; 11 ; 17
 - 6 ; 22 ; 34 ; 33 ; 51 ; 187
 - 66 ; 102 ; 561 ; 374
 - 1 et 2244
3. La décomposition en produits de facteurs premiers du résultat de $365 \times 24 \times 3600$ est

$$\begin{aligned} 365 \times 24 \times 3600 &= 5 \times 73 \times 2^3 \times 3 \times 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \\ &= 2^7 \times 3^3 \times 5^3 \times 73 \end{aligned}$$

4. 512 et 2 ne sont pas premiers entre eux car leur PGCD est 2 (et pas 1).
5. Le PGCD de 15000 et 2100 est 300.
Méthode utilisée : on décompose $15000 = 2^3 \times 3 \times 5^4$ et $2100 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 5^2$ en facteurs premiers. Le PGCD est $2^2 \times 3 \times 5^2$.
6.
 - $126 = (111\ 1110)_b$
 - $(110\ 1011)_b = 107$
 - $690 = (2B2)_h$
 - $(B0B0)_h = (1011\ 0000\ 1011\ 0000)_b$
 - $(11DA)_h = 4570$
 - $(101\ 0011)_b = (53)_h$
7. $(111)_b \times (10000)_b = (111\ 0000)_b$
- 8.

$$22 \equiv 1 \pmod{3} \quad ; \quad 81 \equiv 0 \pmod{9} \quad ; \quad 26 \equiv 6 \pmod{10} \quad ; \quad 9^{9999} \equiv 0 \pmod{1}$$

9. Cinq entiers naturels congrus à 7 modulo 5 :

$$2 \quad 7 \quad 12 \quad 17 \quad 22$$

10. (a)
 - i. Dans la division euclidienne de 1176 par 25, le quotient est 47 et le reste est 1.
 - ii. À l'aide des congruences, cela s'écrit

$$1176 \equiv 1 \pmod{25}$$

- (b) i. Dans la division euclidienne de 22501 par 25, le quotient est 900 et le reste est 1.

ii. À l'aide des congruences, cela s'écrit

$$22501 \equiv 1 \pmod{25}$$

(c) De

$$1176 \equiv 1 \pmod{25} \quad (1)$$

on déduit

$$1176^{500} \equiv 1 \pmod{25} \quad (2)$$

car $1^{500} = 1$. Puis, en multipliant par 34 :

$$34 \times 1176^{500} \equiv 34 \pmod{25} \quad (3)$$

De

$$22501 \equiv 1 \pmod{25} \quad (4)$$

on déduit

$$22501^{500} \equiv 1 \pmod{25} \quad (5)$$

car $1^{500} = 1$.

En ajoutant membre à membre **3** et **5**, on obtient :

$$34 \times 1176^{500} + 22501^{500} \equiv 34 + 1 \pmod{25}$$

soit

$$34 \times 1176^{500} + 22501^{500} \equiv 10 \pmod{25}$$

Le reste de la division euclidienne de $34 \times 1176^{500} + 22501^{500}$ par 25 est donc 10.

Exercice 3

1.

$$E = \overline{a + b} + a$$

$$E = \bar{a}.b + a$$

$$E = (a + \bar{a}).(a + \bar{b})$$

$$E = 1.(a + \bar{b})$$

$$\boxed{E = a + \bar{b}}$$

2.

$$F = a + \bar{a}.b + a.\bar{b}$$

$$F = \underbrace{a + a.\bar{b}}_{\text{absorption}} + \bar{a}.b$$

$$F = a + \bar{a}.b$$

$$F = \underbrace{(a + \bar{a})}_1 . (a + b)$$

$$\boxed{F = a + b}$$

3.

$$G = (a.c + b).(a + \underbrace{b.\bar{b}}_0.c)$$

$$G = (a.c + b).(a + 0)$$

$$G = (a.c + b).a$$

$$G = \underbrace{a.a}_a.c + a.b$$

$$\boxed{G = ac + ab}$$

4.

$$H = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + \bar{a}.b + a.\bar{b}.\bar{c}$$

$$H = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b + a.\bar{b}(\underbrace{c + \bar{c}}_1)$$

$$H = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b + a.\bar{b}$$

$$H = \bar{a}(\bar{b}.\bar{c} + b) + a.\bar{b}$$

$$H = \bar{a}(\underbrace{b + \bar{b}}_1)(b + \bar{c}) + a.\bar{b}$$

$$\boxed{H = \bar{a}.b + \bar{a}.\bar{c} + a.\bar{b}}$$