SIO$_2$ 1 heure 14 octobre 2020

Contrôle de mathématiques pour l'informatique 1

Exercice 1

Un immeuble de 30 étages ne comporte qu'un seul ascenseur A. Pour limiter le temps d'attente au rez-de-chaussée, on décide de mettre un deuxième ascenseur B en service avec un logiciel qui le fera descendre au rez-de-chaussée sous certaines conditions.
On considère les trois propositions suivantes :

- s : « l'ascenseur A est à un étage supérieur au 15ème étage » ;
- m : « l'ascenseur A monte » ;
- r : « l'ascenseur A est appelé ».

1. Traduire par une expression booléenne chacune des situations suivantes :
   (a) « l'ascenseur A est appelé alors qu'il est à un étage supérieur au 15ème étage » ;
   (b) « l'ascenseur A est appelé ou il ne monte pas ».
2. À la suite d'une étude, on fait en sorte que l'ascenseur B descende au rez-de-chaussée chaque fois que l'expression booléenne $F = s.r + m.\overline{r} + \overline{s}.m + s.\overline{m}.\overline{r}$ est vraie.
   (a) À l'aide d'un tableau de Karnaugh, écrire l'expression F comme une somme de deux variables booléennes.
   (b) Traduire l'expression simplifiée de F par une phrase.
   (c) Quelle est l'expression de $\overline{F}$? À quelle situation correspond-elle ?

Exercice 2

À l'aide d'un calcul booléen, simplifier les expressions suivantes :

1. $A = x.y.\overline{t} + y.t$
2. $B = x.y.\overline{t} + \overline{y.t}$
3. $C = (x + y).(x + z.t)$
4. $D = a + b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{(b.\overline{c})}.(a.d + b)$

Exercice 3

A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble E.
On définit

$A \cup B = \{x \in E \ ; \ (x \in A) \vee (x \in B)\}$,
$A \cap B = \{x \in E \ ; \ (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
et $\overline{A} = \{x \in E \ ; \ x \notin A\}$.

1. Donner de la même manière une définition de $\overline{A \cup B}$ et de $\overline{A \cap B}$.
2. Écrire une égalité d'ensembles faisant intervenir $\overline{A \cup B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.
3. Dans *Le Monde* du 27/9/99 on pouvait lire : d'après une étude de la Chambre Syndicale des F.A.P.A.F. (Fabricants d'Aliments Préparés pour Animaux Familiers), 28% des foyers français possèdent (au moins) un chien, 25% (au moins) un chat et 45% (au moins) un chien ou un chat. Peut-on en déduire le pourcentage de foyers qui ont (au moins) un chien et un chat ? de ceux qui n'ont ni l'un ni l'autre ?

SIO$_2$ 1 heure 14 octobre 2020

Corrigé du contrôle de mathématiques pour l'informatique 1

Exercice 1

1. (a) « l'ascenseur A est appelé alors qu'il est à un étage supérieur au 15ème étage » se traduit par l'expression booléenne : $\boxed{s.r}$.

   (b) « l'ascenseur A est appelé ou il ne monte pas » se traduit par $\boxed{\overline{m} + r}$.

2. $F = s.r + m.\overline{r} + \overline{s}.m + s.\overline{m}.\overline{r}$

   (a) Tableau de Karnaugh : .

F :

r \ sm			s	s
	000 0	010 1	110 1	100 1
r	001 0	011 1	111 1	101 1
		m	m	

Le tableau permet de simplifier F :

$$\boxed{F = s + m}$$

(on a formé deux groupes de quatre 1)

   (b) L'expression simplifiée de F signifie « l'ascenseur A est à un étage supérieur au 15ème ou il monte ».

   (c) $\overline{F} = \overline{s + m} = \overline{s}.\overline{m}$. Cela signifie : « l'ascenseur est à un étage inférieur ou égal au 15ème et il ne monte pas ».

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned}
A &= x.y.\bar{t} + y.t \\
&= y(x\bar{t} + t) \\
&= y((t + \bar{t})(t + x)) && \text{distributivité de } + \text{par rapport à .} \\
&= y(1(t + x)) \\
&= y(t + x) \\
&\boxed{A = yt + xy}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
B &= x.y.\bar{t} + \overline{y.t} \\
&= x.y.\bar{t} + \overline{y} + \bar{t} && \text{loi de De Morgan} \\
&= \underbrace{x.y.\bar{t} + \bar{t}} + \overline{y} \\
&\boxed{B = \quad \bar{t} \quad + \overline{y}} && \text{absorption}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
C &= (x+y).(x+z.t) \\
&= xx + xzt + xy + yzt \\
&= \underbrace{x + xzt} + xy + yzt \\
&= \underbrace{\quad x \quad + xy} + yzt && \text{absorption} \\
&= \quad x \qquad + yzt && \text{absorption} \\
&\boxed{C = x + yzt}
\end{aligned}$$

NB : on peut affirmer directement que $(x+y).(x+z.t) = x + y.(zt)$; c'est le développement de $+$ par rapport à $.$

4.

$$\begin{aligned}
D &= a + b.\bar{c} + \bar{a}.\overline{(b.\bar{c})}.(a.d+b) \\
&= a + b.\bar{c} + \bar{a}(\bar{b}+c)(a.d+b) && \text{loi de De Morgan} \\
&= a + b.\bar{c} + (\bar{a}\bar{b} + \bar{a}c)(a.d+b) \\
&= a + b.\bar{c} + (\bar{a}\bar{b}ad + \bar{a}\bar{b}b + \bar{a}cad + \bar{a}cb) \\
&= a + b.\bar{c} + (0+0+0+\bar{a}cb) \\
&= a + b.\bar{c} + \bar{a}cb \\
&= a + b(\bar{c} + \bar{a}c) \\
&= a + b(\bar{c}+\bar{a})(\bar{c}+c) && \text{distributivité de } + \text{par rapport à .} \\
&= a + b(\bar{c}+\bar{a})(1) \\
&= a + \bar{a}b + b\bar{c} \\
&= (a+\bar{a})(a+b) + b\bar{c} && \text{distributivité de } + \text{par rapport à .} \\
&= a + \underbrace{b + b\bar{c}} && \text{absorption} \\
&\boxed{D = a + \ b}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. $\overline{A \cup B} = \complement_E(A \cup B) = \{x \in E \ ; \ x \notin A \cup B\}$
   $\overline{A \cap B} = \complement_E(A \cap B) = \{x \in E \ ; \ x \notin A \cap B\}$
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ou $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
2. Notons

   A l'ensemble des foyers possédant un chien,

   B l'ensemble des foyers possédant un chat,

   E l'ensemble des foyers.

   - Le pourcentage de foyers qui ont (au moins) un chat **et** un chien est 8% (ensemble $A \cap B$).
   - $100 - 45 = 55\%$ n'ont ni l'un ni l'autre ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$).