

5.5 • le système $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$ s'écrivent à l'aide de matrices $AX = B$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(En effet $AX = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 10y \\ -2x + 8y \end{pmatrix}$)

AX est égale à B si leurs coefficients correspondants sont égaux :

$$\begin{matrix} 3x - 10y & \tilde{=} & 4 \\ -2x + 8y & \tilde{=} & 7. \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ \underline{I}X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

on multiplie les deux membres par A^{-1} (par la gauche).

(car $I X = X$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On prend alors la calculatrice, on stocke A dans $[A]$ (Ti) ou MatA (Casio), puis on calcule $A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 2\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\begin{matrix} x = 5\frac{1}{2} \\ y = 2\frac{3}{4} \end{matrix}}$

• De même, le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

s'écrivent $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1}$$

5.6

1) $C = P \times M = \begin{pmatrix} 71 & 51 & 70 & 152 & 85 \\ 78 & 58 & 30 & 186 & 40 \end{pmatrix}$

2) $C = P \times M$
 $P^{-1}C = \underbrace{P^{-1}P}_I M$ \rightarrow on multiplie les deux membres par P^{-1} (à gauche)

$P^{-1}C = IM$

$P^{-1}C = M$

3) En multipliant par P^{-1} le message codé C , on obtient le message de départ M .

4) $P^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 1 & 24 & 16 & 43 & 49 & 3 & 42 \\ 5 & 21 & 22 & 49 & 7 & 1 & 7 & 15 & 5 \end{pmatrix} = M$

À l'aide du tableau public, on obtient :

	R	A	V	O	,	L	C	'	E	S	T	U	G	A	G	N	E	
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
	02	19	01	24	16	43	49	03	42	05	21	22	49	07	01	07	15	05

5) À faire sur tableur

5.7

$$1) AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -4-a & 3a-8 \end{pmatrix}$$

On veut $AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ donc $-4-a = -9$ ①
 et $3a-8 = 7$ ②

① donne $-a = -9 + 4$
 $a = 5$ et ② aussi!

$$2) A \times B = (a \ b) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (4a-b \ b-2a \ b-a \ a+b)$$

on veut que $AB = C = (2 \ 0 \ 1 \ c)$ donc :

$$\begin{cases} 4a - b = 2 & \text{①} \\ b - 2a = 0 & \text{②} \\ b - a = 1 & \text{③} \\ a + b = c & \text{④} \end{cases}$$

② donne $b = 2a$. ②'

Dans ①, on remplace b par $2a$: $4a - 2a = 2$
 $2a = 2$ $a = 1$

②' $b = 2a$ $b = 2$

③ $2 - 1 = 1$ ok

④ $1 + 2 = c$ $c = 3$

5.8

$$1) M \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 9 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a-13 & -a+13 & 2a-26 \\ -a+13 & a-13 & -2a+26 \end{pmatrix}$$

Avec $a = 13$, $M \times A$ est la matrice nulle.

2) Avec $a = 13$,

$$A \times M = \begin{pmatrix} -45 & 360 & -153 \\ 5 & -40 & 17 \\ 25 & -200 & 85 \end{pmatrix} \quad A \times M \neq 0$$

5.10

A) 1) $51 \equiv 3 \pmod{6}$ $\begin{array}{r} 51 \\ 3 \overline{) 51} \\ \underline{3} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$
donc le client 51 est suivi par le technicien D.

2) $23 \equiv 5 \pmod{6}$ $\begin{array}{r} 23 \\ 5 \overline{) 23} \\ \underline{5} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$
le client 23 est donc suivi par le technicien E.

B) 1) le client 1 a pour code 12 donc: $x + 1y + 1z = 12$.
le client 2 a pour code 27 donc: $x + 2y + 2z = 27$.
le client 3 a pour code 50 donc: $x + 3y + 3z = 50$.

2) le système ci-dessus s'écrit bien $MX = Y$.

$$a) PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) $MX = Y$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{on multiplie les deux membres} \\ \text{par la gauche par } P \end{array} \right.$

$$\underbrace{PM} X = PY$$

$$IX = PY$$

$$X = PY$$

$$c) X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{array}}$$

Corrigé de l'exercice 5.9

1. (a)

$$MC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 16 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 244 \\ 388 \end{pmatrix}$$

(b) On considère le cas où 10 clients optent pour la formule F1, 8 pour la formule F2 et 14 pour la formule F3. Le coût d'achat est 90€, le temps est 244 minutes et le prix de vente est 388€.

2. (a)

$$P = (3a + 16 - 12 \quad 4a + 20 - 16 \quad 2a + 12 - 10) = \begin{pmatrix} 3a + 4 & 4a + 4 & 2a + 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(b) Déterminons le réel a tel que le produit matriciel PM soit égal à la matrice

unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} 3a + 4 = 1 \\ 4a + 4 = 0 \\ 2a + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

3. Dans la suite de l'exercice on prend $a = -1$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM = I$.

Si

$$MX = Y$$

alors, en multipliant les deux membres à gauche par P , on obtient :

$$PMX = PY.$$

Comme $PM = I$, on a

$$X = PY$$

4. On sait que le fournisseur a dépensé 100 euros pour l'achat du matériel, que le conditionnement a nécessité 270 minutes et que la recette pour ces trois formules a été de 430 euros. On a donc

$$Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 270 \\ 430 \end{pmatrix}$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1,5 & 0,5 \\ -2 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 270 \\ 430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

10 clients ont donc choisi la formule F1, 10 la formule F2 et 15 la formule F3.