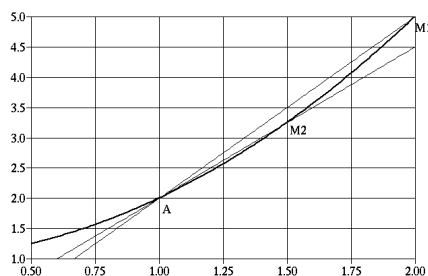


8.3 Dérivation

8.3.1 Tangente à la courbe d'une fonction

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^2 + 1$ est tracée ci-dessous.



$A(1;2)$ est un point de la parabole. Les points $M_1(2; \dots)$ et $M_2(1,5; \dots)$ sont des points de la parabole.

Intéressons-nous aux droites (AM_1) et (AM_2) .

— la droite (AM_1) a pour coefficient directeur : $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} =$

— la droite (AM_2) a pour coefficient directeur : $\frac{f(1,5) - f(1)}{1,5 - 1} =$

Soit h un réel. Le point M de la parabole d'abscisse $1 + h$ a une ordonnée égale à :

Pour des valeurs de h se rapprochant de zéro, on peut calculer le coefficient directeur a des droites (AM) :

$$a = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

Compléter le tableau :

h	-0,5	-0,2	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,2	0,5	1
a											

Plus h se rapproche de zéro, plus le point M se rapproche de A et plus la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$.

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ est égal à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

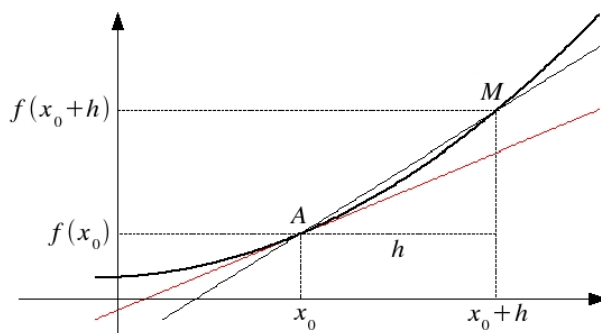
8.3.2 Définition du nombre dérivé

Définition 9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 . Si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe, on dit que f est dérivable en x_0 . La limite est alors appelée le nombre dérivé de f en x_0 . Ce nombre dérivé est noté $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

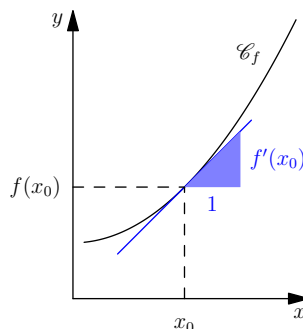


$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.

L'équation réduite de cette tangente est donc :

$$y = f'(x_0)x + p$$

On détermine p en écrivant que le point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ appartient à cette tangente²⁾.



8.3.3 Fonction dérivée

Les formules des tableaux (page ??) donnent les nombres dérivés pour toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles.

8.3.4 Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème 1 (Le théorème fondamental). f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Si f' est positive sur I , alors f est croissante sur I .

Si f' est négative sur I , alors f est décroissante sur I .

Si f' est strictement positive sur I , alors f est strictement croissante sur I .

Si f' est strictement négative sur I , alors f est strictement décroissante sur I .

Ce théorème est admis. Il faut comprendre ceci : si $f' > 0$ sur I , alors tous les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f sont positifs : toutes les tangentes "montent", donc f est croissante. La réciproque de ce théorème existe et est admise également.

Application : **pour étudier les variations d'une fonction f :**

- on calcule sa fonction dérivée f'
- on étudie le signe de $f'(x)$.
- on en déduit les variations de f à l'aide du théorème ci-dessus
- on résume tout dans un tableau de variations

Exemple et intérêt

Étudions, sur l'intervalle $[0; 7]$, la fonction polynôme f de degré 3 définie par

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 39x - 20$$

Un tracé rapide sur l'écran de la calculatrice pourrait nous induire en erreur :

Il semble que la fonction soit croissante sur $[0; 7]$. Mais non !

- Calcul de la dérivée $f' : f'(x) =$
- Signe de $f'(x)$

2. Si on a une mémoire suffisante, on peut retenir l'équation de la tangente à la courbe de f en $(x_0; f(x_0))$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

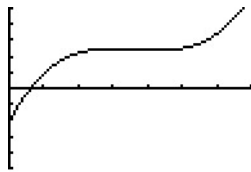


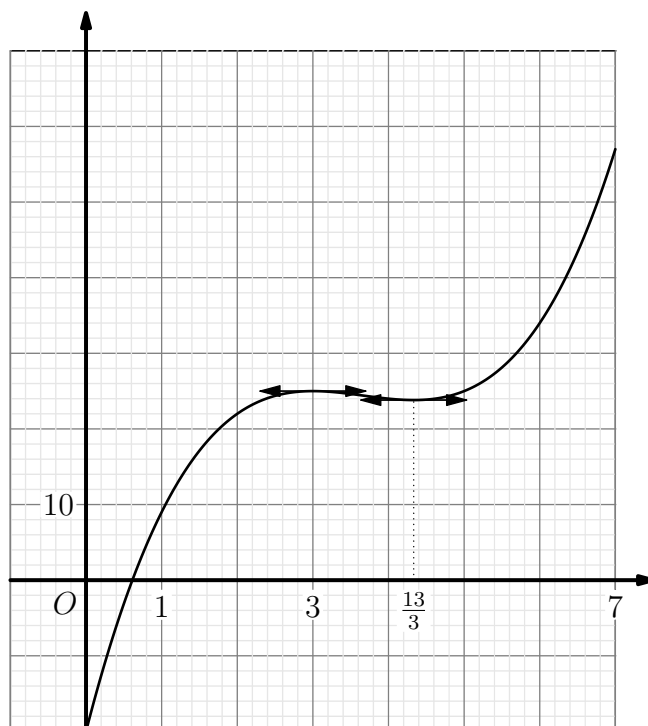
FIGURE 8.1 – sur une TI-83Plus.fr

- Tableau de variations : on indique d'abord le signe de $f'(x)$ puis les flèches indiquant les variations de f .

x	0	3	$\frac{13}{3}$	7			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	-20	$\nearrow$	25	$\searrow$	m	$\nearrow$	57

$$m \simeq 23,8$$

- Courbe représentative de f



Signes connus

On sait étudier le signe

- d'une fonction affine
- d'un polynôme de degré deux
- de quelques expressions : d'un carré, d'une racine carrée, d'une somme de nombres positifs.

Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$k \in \mathbb{R} ; x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}^* ; x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^* \text{ si } n \leq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0; +\infty[$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \in]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$

Opérations

Fonction	Dérivée	
$f = U + V$	$f' = U' + V'$	
$f = kU$	$f' = kU'$	$k \in \mathbb{R}$
$f = UV$	$f' = UV' + U'V$	
$f = \frac{U}{V}$	$f' = \frac{VU' - UV'}{V^2}$	$V(x) \neq 0$
$f = \frac{1}{V}$	$f' = \frac{-V'}{V^2}$	$V(x) \neq 0$
$f = U^n$	$f' = nU'U^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$f = \sqrt{U}$	$f' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$U(x) > 0$
$f = \ln(U)$	$f' = \frac{U'}{U}$	$U(x) > 0$
$f = \exp(U) = e^U$	$f' = U' \exp(U) = U' e^U$	
$f(x) = V \circ U(x)$	$f'(x) = U'(x) \times V'(U(x))$	

Exercices sur les fonctions. Dérivation

Exercice 8.33. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (là où elles existent) :

$$g(x) = x^3 + x^2 + x$$

$$h(x) = -x + \sqrt{x} + 1$$

$$a(x) = 1 - 4x$$

$$c(x) = 4x^3 + \frac{3}{7}x^5$$

$$b(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

$$d(x) = \frac{5}{x} - 5x$$

$$e(x) = (x + 3)(5x^2 + 2)$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{1 + 2x}$$

Exercice 8.34. À partir d'un carré de carton de 25 cm de côté, on fabrique une boîte sans couvercle en enlevant des carrés de côtés x aux quatre coins puis en relevant les bords. Prouver que le volume de la boîte est $f(x) = 4x^3 - 100x^2 + 625x$. Déterminer le volume maximal que l'on peut obtenir. Pour quelle(s) valeur(s) de x obtient-on un volume de 900 cm³ (on donnera un encadrement de cette(ces) valeur(s) à 10^{-3} près si besoin) ?

Exercice 8.35. Dans un repère du plan, on donne un triangle ABC tel que $A(0; 0)$, $B(2; 5)$ et $C(6; 2)$. Déterminer une fonction polynôme du troisième degré, définie sur l'intervalle $[0; 6]$, dont la courbe passe par les points A et C et dont les tangentes en A et C sont respectivement les droites (AB) et (BC) .

Exercice 8.36. Une boîte de conserve cylindrique de rayon R (en cm) et de hauteur h (en cm) a une contenance de 250π cm³, soit environ 785 cm³.

Montrer que l'aire totale de cette boîte est

$$\frac{500\pi}{R} + 2\pi R^2$$

Déterminer la valeur de R pour que l'aire totale soit minimale.

Exercice 8.37. Dans une usine qui embouteille de l'eau minérale, le bénéfice total dépend du nombre de bouteilles produites. Il est relativement faible quand la production est faible (frais incompressibles ...) augmente lorsqu'elle est plus élevée, mais diminue à nouveau au-delà d'un certain seuil (infrastructures et embauches complémentaires ...). La fonction f modélise ce bénéfice. Pour n packs produits et vendus, il est donné, en euros, par :

$$f(n) = \frac{1}{30\,000\,000}n^3 - \frac{1}{1\,250}n^2 + \frac{119}{20}n - \frac{15\,550}{3}$$

où n est un entier naturel appartenant à l'intervalle $[1\,000; 10\,000]$. Pour quelle valeur de n le bénéfice est-il maximal ?

Exercice 8.38. Un jeune coureur sur « boîte à savon » circule à toute vitesse sur une piste modélisée dans un repère du plan par la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f telle que :

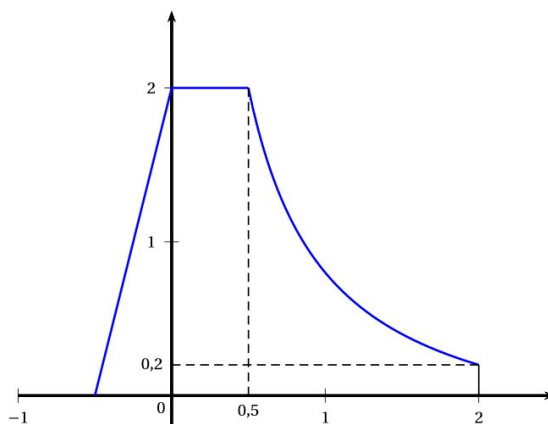
$$f(x) = \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{5}x$$

Soudain, la direction du véhicule ne répond plus et il sort de la piste en empruntant une trajectoire rectiligne correspondant à une tangente à la courbe $\mathcal{C}$. À quel endroit a-t-il quitté la piste sachant que la « boîte à savon » a terminé sa course contre un arbre représenté dans le repère par le point $A(11; 17)$?

Exercice 8.39. Une voiture 4×4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant un champ. Sachant que sa vitesse sur la route est de 40 km.h^{-1} et que sa vitesse à travers champ est de 20 km.h^{-1} , déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

Exercice 8.40. Existe-t-il, parmi tous les triangles isocèles dont deux côtés mesurent 10cm, un triangle d'aire maximale ?

Exercice 8.41. Deux³ cargos suivent des routes rectilignes et perpendiculaires à la même vitesse. Quand le premier est encore à 10km de l'intersection de leurs trajectoires, l'autre est à 8km de ce point. Il y a de la brume et la visibilité n'excède pas 1,3km. Pourront-ils se voir à un moment de leurs parcours



Exercice 8.42. Une entreprise veut réaliser les deux montants latéraux d'un toboggan. La courbe qui modélise le toboggan est définie comme une partie de la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction f dans un repère orthonormé adapté.

Question préliminaire

La partie utile de la courbe $(\mathcal{C})$ qui modélise le toboggan est délimitée par les points de coordonnées $(0,5; 2)$ et $(2; 0,2)$ comme le suggère le schéma ci-dessus.

La fonction f est définie, pour tout nombre réel x strictement positif, par

$$f(x) = a + \frac{b}{x}$$

où a et b sont deux nombres réels.

Déterminer a et b .

Partie A. Étude de fonction

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0,5; 2]$ par :

$$f(x) = -0,4 + \frac{1,2}{x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5; 2]$.

3. animation geogebra dans lies/cargo.ggb

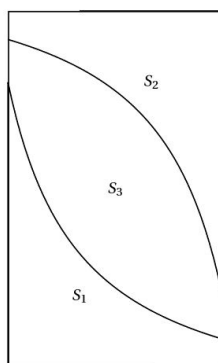
2. Étudier le sens de la variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 2]$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0,5 et une équation de la tangente T_2 à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2.
4. Tracer, dans le repère indiqué, les droites T_1 et T_2 , ainsi que la courbe $(\mathcal{C})$.
5. (a) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 2]$.
 (b) Montrer que l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0,5$ et $x = 2$, vaut $2,4 \ln 2 - 0,6$.

Partie B. Étude de la masse perdue en production

Les montants sont réalisés dans des plaques de métal rectangulaires de 2,5 m sur 1,5 m. On suppose que chaque plaque a une masse de 500 kg.

Chaque plaque permet de fabriquer deux montants comme indiqué sur le dessin ci-après. Les surfaces S_1 et S_2 de taille identique, correspondent aux deux montants latéraux d'un toboggan et la surface S_3 restante est perdue.

D'après la partie A, la valeur exacte, en m^2 , de l'aire de la surface S_1 est $2,4 \ln 2 - 0,6$.



1. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-4} près de l'aire en m^2 de la surface restante S_3 est égale à 1,6229.
2. Déterminer la masse de la partie inutilisée de la plaque correspondant à la surface S_3 .