Chapitre 8

Fonctions d'une variable réelle

8.1 Fonctions usuelles

8.1.1 Fonctions affines

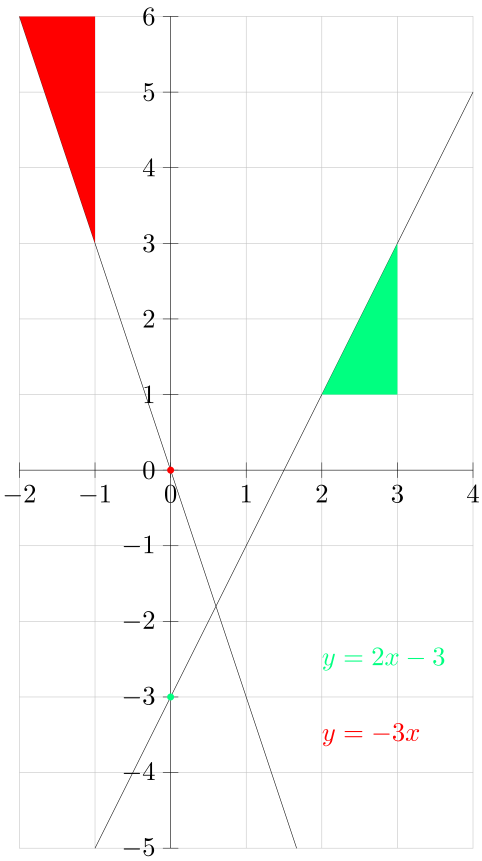
I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux nombres réels, la fonction :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

est appelée fonction affine. Si $b = 0$, la fonction est dite *linéaire*.

Exemple 1 . Soit la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-7	-5	-3	-1	1	3	5



Exemple 2 . Soit la fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3x$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	6	3	0	-3	-6	-9	-12

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite d. On dit que l'*équation réduite* de d est : $y = ax + b$.

Vocabulaire : a s'appelle le *coefficient directeur* de la droite et b est son *ordonnée à l'origine.*

Remarque : la courbe d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

Variations

Si $a > 0$ la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante.
Si $a < 0$ la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante.

Détermination d'une fonction affine

- **Par le calcul**

  Deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'une droite étant connus, il faut savoir trouver la fonction affine représentée par la droite (AB).

  On résout ceci en quatre étapes : déterminons la fonction affine f telle que $f(-4) = 2$ et $f(3) = -1$.

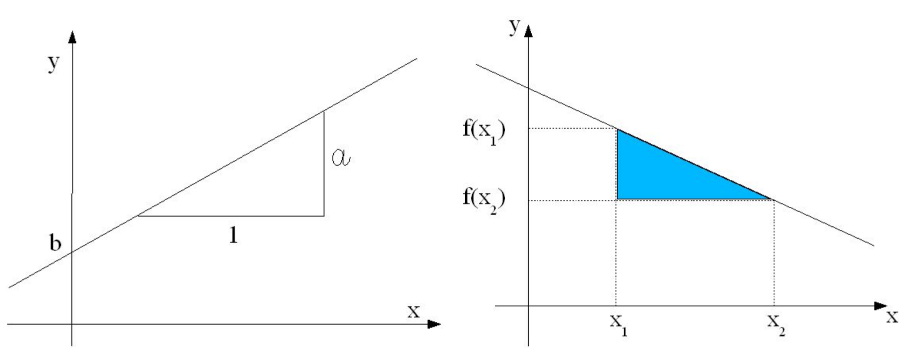
  1. L'expression de f est de la forme $f(x) = ax + b$.
  2. a se calcule par
  $$\boxed{a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}} = \frac{-1-2}{3-(-4)} = \frac{-3}{7}$$
  3. Pour trouver b, on écrit que $f(x_A) = y_A$:
  $$2 = \frac{-3}{7} \times (-4) + b$$
  $$\text{d'où} \qquad b = 2 - \frac{-3}{7} \times (-4) = \frac{2}{7}$$
  4. f est donc définie par
  $$f(x) = \frac{-3}{7}x + \frac{2}{7}$$

- **Par lecture graphique**

  Une droite étant tracée dans un repère du plan, il faut savoir trouver la fonction affine correspondante.

  L'expression de la fonction affine étant $f(x) = ax + b$, on a immédiatement : $f(0) = a \times 0 + b = b$. Donc sur le graphique, b est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.

  On sait que $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ pour tous les nombres distincts x_1 et x_2. On choisit souvent $x_1 - x_2 = 1$. Ainsi a est le côté vertical du triangle :



- En cas de détresse, utiliser la calculatrice : entrer les deux abscisses dans une liste, les deux ordonnées dans une autre ; le menu « régression linéaire » donne l'équation de la droite.

Signe de $ax + b$

Si $a \neq 0$, $ax + b$ change une fois de signe : deux cas se présentent.

1. Si $a > 0$

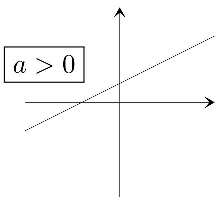
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	

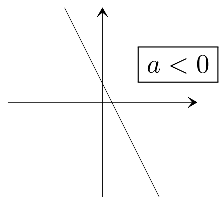
2. Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		0	

On trouve $-\frac{b}{a}$ en résolvant $ax + b = 0$ qui équivaut à $ax = -b$ et à $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si $a > 0$, on a déjà prouvé que la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est croissante ; comme elle vaut 0 en $x = -\dfrac{b}{a}$, elle est négative avant et positive après.





Exemple : $f(x) = 2x - 1$ est négatif pour x dans $]-\infty; 0{,}5]$ et positif pour x dans $[0{,}5; +\infty[$.

On présente souvent ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		0,5		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

Bien sûr, « $f(x)$ est de signe plus » se dit aussi : « $f(x) > 0$ » ou encore « $f(x)$ est positif ».

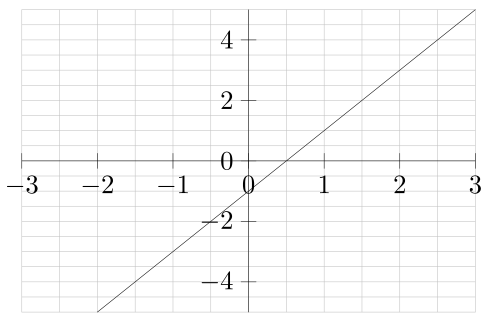
Pour le retrouver, on résout $2x - 1 = 0$ puis :

— soit on voit dans sa tête une fonction affine croissante, qui prend d'abord des valeurs négatives, puis des valeurs positives.

— soit on résout par exemple $2x - 1 > 0$; la solution est $x > 0{,}5$.

Pour ceux qui auraient un doute : compléter le tableau et observer le graphique.

x	-5	-3	-1	0	0,5	1	3	5	100
$f(x)$									



Signe d'un produit de fonctions affines ; inéquation-produit

On étudie le signe de produits de fonctions affines à l'aide d'un tableau de signes.

Étudions par exemple le signe de

$$(3x+1)(-x+4)$$

Ces deux expressions changent de signe pour $x = \frac{-1}{3}$ et $x = 4$ (résoudre $3x + 1 = 0$ et $-x + 4 = 0$).

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$		4		$+\infty$
$3x+1$		0				
$-x+4$				0		
produit						

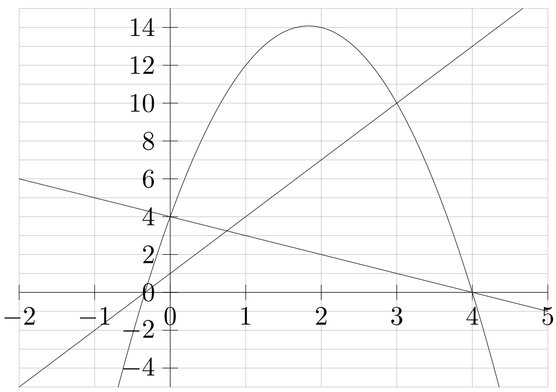
La dernière ligne se remplit à l'aide de la règle donnant le signe d'un produit.

On peut à présent résoudre des inéquations-produits : la solution de $(3x+1)(-x+4) > 0$ est :

La solution de $(3x+1)(-x+4) \leqslant 0$ est :

Lien avec les fonctions

On a représenté les fonctions $x \mapsto 3x+1$, $x \mapsto -x+4$ et $x \mapsto (3x+1)(-x+4)$. Retrouver tous les signes et les zéros du tableau ci-dessus sur le graphique.



Inéquations quotients

La règle des signes est la même pour les produits et pour les quotients. Résolvons par exemple $\dfrac{x^2+1}{x+3} \geqslant 0$.

$x + 3$ s'annule pour $x = -3$ qui est donc une valeur interdite (d'où la double-barre dans le tableau).

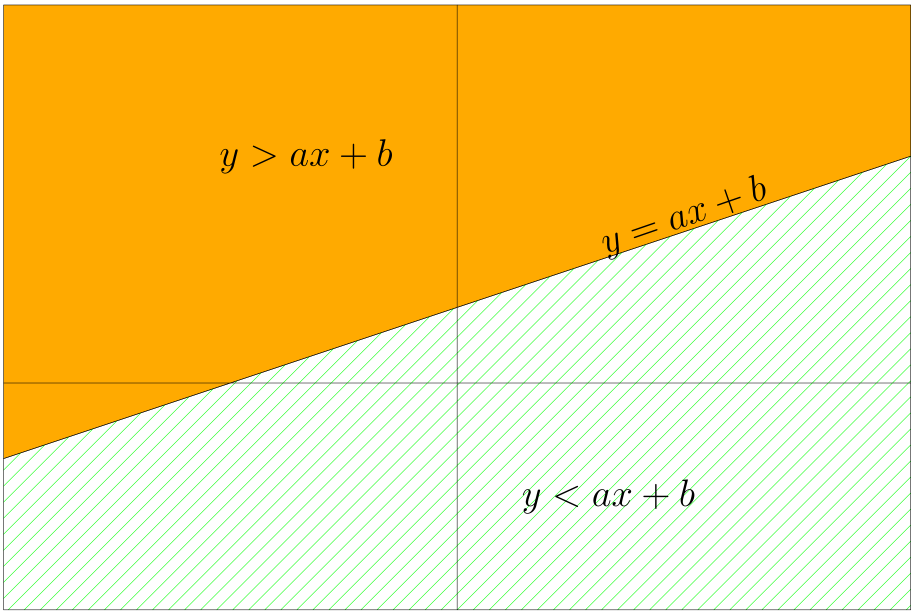
$x^2 + 1$ n'est pas une fonction affine, mais on sait que pour tout x, $x^2 \geqslant 0$. Par conséquent, $x^2+1 \geqslant 1$, donc est positif strictement.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$	
$x+3$			0		
quotient			‖		

La solution de l'inéquation-quotient est :

Régionnement du plan

La droite d'équation $y = ax + b$ sépare le plan en deux régions.



Cela permet de résoudre graphiquement des inéquations à deux inconnues.

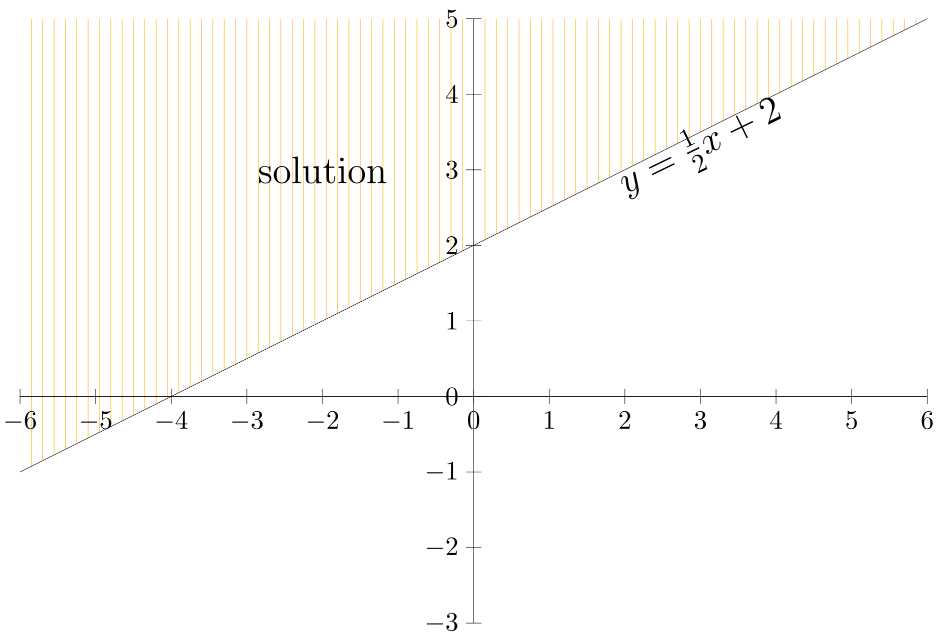
Exemple : représentons dans le plan l'ensemble des solutions de :

$$x - 2y + 4 < 0$$

Cette inéquation est équivalente à :

$$y > \frac{1}{2}x + 2$$

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ sépare le plan en deux demi-plans. La solution de l'inéquation est l'ensemble des couples qui sont les coordonnées des points de la zone hachurée.



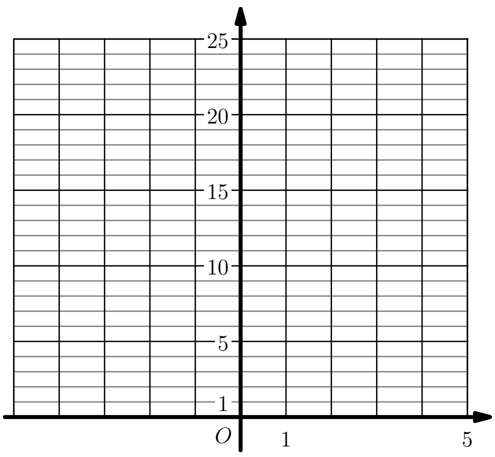
8.1.2 Fonction carré

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Elle est croissante sur $[0\,;\ +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$.

On résume ces résultats dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Cette courbe s'appelle une *parabole*. On remarque que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on dit que la fonction est *paire*.

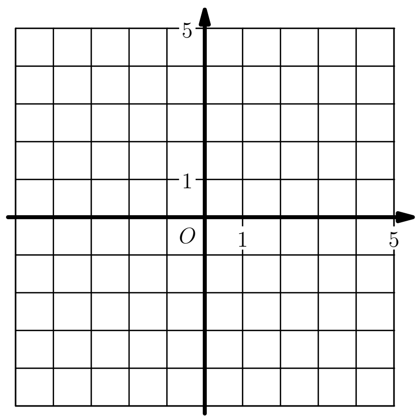
8.1.3 Fonction inverse

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	



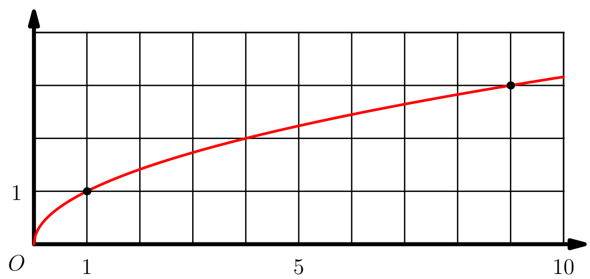
Cette courbe s'appelle une *hyperbole*. Elle est symétrique par rapport à O : on dit que f est *impaire*.

8.1.4 Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$; à tout réel positif x, elle associe $\sqrt{x}$.

Elle est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	

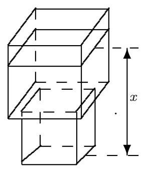


Exercice 8.1. Déterminer la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(-1) = 3$ par le calcul et graphiquement.

Exercice 8.2. Températures en degrés Celsius et degrés Fahrenheit. L'eau bout à 100 degrés C et 212 degrés F. Elle gèle à 0 degré C et 32 degrés F. Sachant que la température en degrés F est une fonction affine de la température en degrés C, trouver une relation entre les deux. Trouver à quoi correspondent : 18 degrés C, 40 degrés C, 60 degrés F et 99,9 degrés F.

Exercice 8.3. Fonction affine par morceaux. Volume de la cuve

Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent. L'arête du grand cube mesure 80 cm, celle du petit 60 cm. Le petit est posé par terre.



On désigne par x (en cm) la hauteur du liquide dans la cuve et par $V(x)$ le volume en litres du liquide correspondant.

Représentez graphiquement le volume $V(x)$ en fonction de x. Prenez en abscisse 1 cm pour 10 cm et en ordonnées 1 cm pour 50 litres.

Exercice 8.4.
1. Dans un repère, représenter les fonctions affines f et g définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 3$ et $g(x) = 2x - 4$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.
3. Établir un tableau de signe de la fonction C définie pour tout x réel par $C(x) = (-x + 3)(2x - 4)$, puis en déduire les solutions de $C(x) < 0$.

Exercice 8.5. Résoudre :
- $(x + 7)(1 - 4x) < 0$
- $\dfrac{x + 7}{1 + 4x} < 0$
- $(2x - 1)(x - 1)(1 - x) > 0$

Exercice 8.6. À l'aide d'une représentation graphique rapide des fonctions carré, inverse et racine, résoudre les inéquations :

a) $x^2 < 4$; b) $x^2 \geqslant 7$; c) $x^2 < -1$; d) $x^2 > -7$

e) $\dfrac{1}{x} > 10$; f) $\dfrac{1}{x} < -0{,}5$; g) $\dfrac{1}{x} > -2$; h) $\sqrt{x} < 4$

i) $\sqrt{x} \geqslant 7$; j) $\sqrt{x} < -1$; k) $\sqrt{x} > -7$

Peut-on affirmer que si $x > -0{,}5$, alors on a $x^2 > 0{,}25$?

Exercice 8.7. Monsieur François va ouvrir un marché « puces et brocante » sur son terrain. Il y a délimité 120 emplacements. L'installation des exposants commencera à 6 h, le dernier exposant devra avoir fini de s'installer à 8 h. Il prévoit que chaque exposant arrivant :
- — avec une voiture, paiera 10 euros de redevance et disposera de deux emplacements pour installer son stand,
- — avec un fourgon, paiera 16 euros de redevance et disposera de trois emplacements.

Il faut en moyenne 1 min à une voiture pour se garer et 4 min à un fourgon.

Pour des raisons de. sécurité, chaque exposant ne peut commencer à se garer que lorsque le précédent a fini de se garer.

Monsieur François souhaite déterminer le nombre de voitures et le nombre de fourgons nécessaires pour que sa recette soit maximale.

Partie A : On note x le nombre de voitures et y le nombre de fourgons.

1. Écrire un système d'inéquations correspondant aux contraintes du problème.
2. En utilisant la feuille de papier millimétré fournie, déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système (S) suivant avec comme unité graphique 1 cm pour 5 unités sur les deux axes. On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ y & \leqslant & -\frac{2}{3}x+40 \\ y & \leqslant & -\frac{1}{4}x+30 \end{array}\right.$$

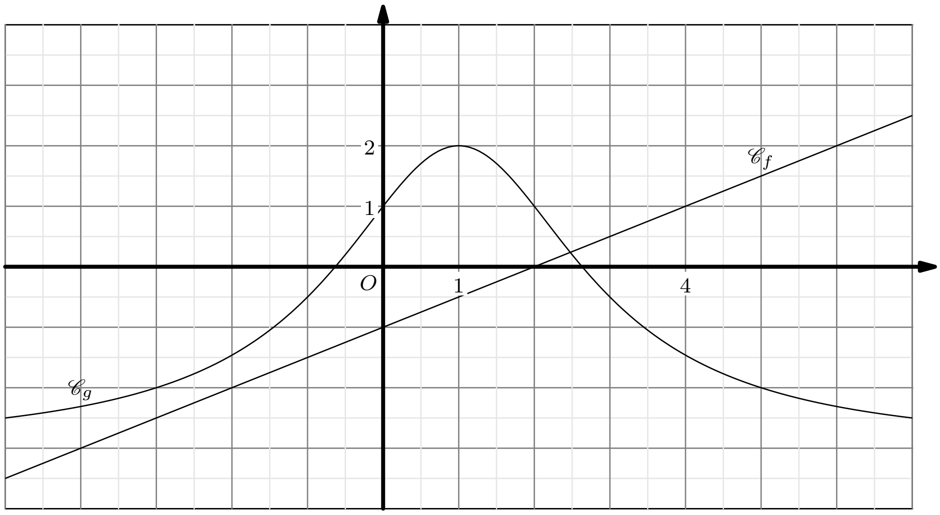
3. Après avoir justifié le lien entre les questions 1 et 2, préciser si Monsieur François peut accueillir :
   (a) 50 voitures et 20 fourgons ?
   (b) 30 voitures et 15 fourgons ?
   (c) 24 voitures et 24 fourgons ?

Partie B : On note R la recette de la journée

1. Exprimer R en fonction de x et y.
2. Montrer que la droite D d'équation $y = -\frac{5}{8}x + 10$ correspond à une recette de 160 euros.
3. (a) Représenter la droite D dans le repère précédent.
   (b) Trouver le couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ qui permet d'obtenir la recette maximale.
   (c) Calculer alors cette recette maximale et répondre au problème posé.

Exercice 8.8. On a tracé ci-contre sur $[-5; 7]$ la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction affine f et la courbe $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g.

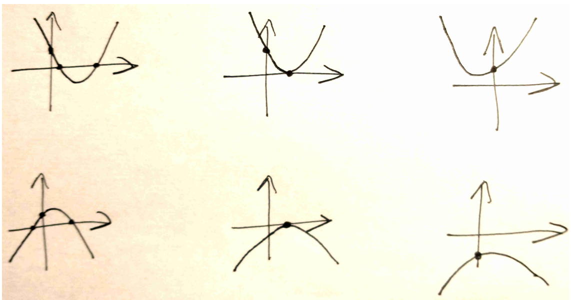
1. Indiquer, dans un tableau, le signe de f. Sans justifier, donner l'expression de f. Indiquer, dans un tableau, les variations de g.
2. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative des fonctions h, m et p définies sur $[-5; 7]$ par $h(x) = x^2$, $m(x) = \frac{1}{x}$ et $p(x) = \frac{4-2x}{3}$.
3. Sans justifier (et en donnant si besoin des valeurs approchées), déterminer graphiquement $f(1)$ et résoudre : $f(x) = -1$; $g(x) > -2$; $\frac{2}{x} < 0$; $x^2 \geqslant 3$; $x^2 \geqslant \frac{1}{x}$; $f(x) - g(x) < 0$.
4. Supplément : résoudre les (in)équations précédentes par le calcul.



8.2 Fonctions polynômes de degré 2

Ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
a, b et c sont des nombres réels.

À l'aide de la calculatrice, trouver six fonctions polynômes de degré 2 correspondant aux schémas ci-dessous.

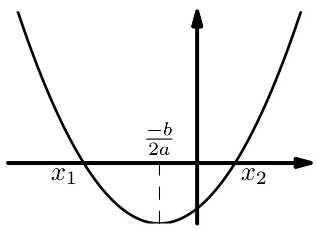
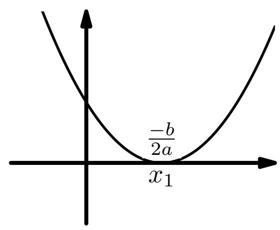
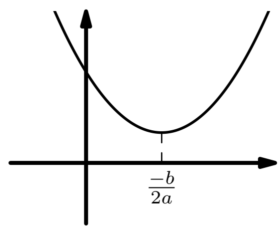
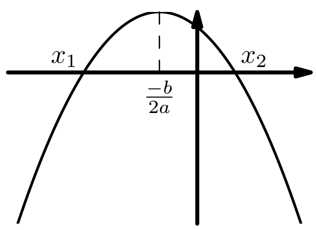
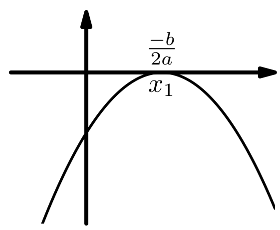
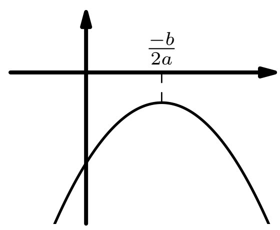


Second degré

La fonction polynôme du second degré f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(a, b, c réels, $a \neq 0$). Ses variations et son signe sont connus et visibles sur les représentations graphiques de f :

<table>
<tr><td></td><td>$\Delta > 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Signe

$\boxed{ax^2 + bx + c \text{ est du signe de } a \text{ sauf entre ses racines éventuelles.}}$

Variations

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	↘		↗

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	↗		↘

Résolution de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

— Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

— Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

Factorisation d'un polynôme du second degré

- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
- Si $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas en produit de facteurs du premier degré.

Exemple 1. $2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta =$

Exemple 2. $2x^2 - 5x - 1 = 0$

$\Delta =$

$x_1 =$ et $x_2 =$

Exemple 3. $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta =$

Exemple 4. $-3x^2 - 5x + 1 \geqslant 0$

$\Delta =$

$x_1 =$ et $x_2 =$

Exemple 5. $-7x^2 + x - 8 > 0$

Exemple 6. $-x^2 + 4x - 4 < 0$

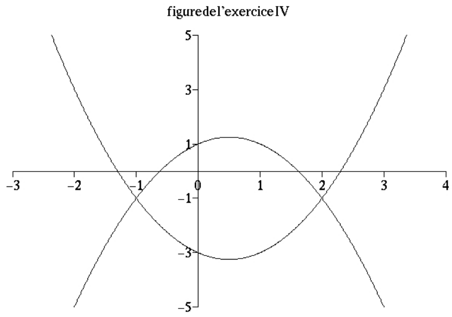
Exercice 8.9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a) \quad -x^2+x+1=0 \quad ; \quad b) \quad 5x^2+7x+6=0 \quad ; \quad c) \quad 7x^2+4x=0$$

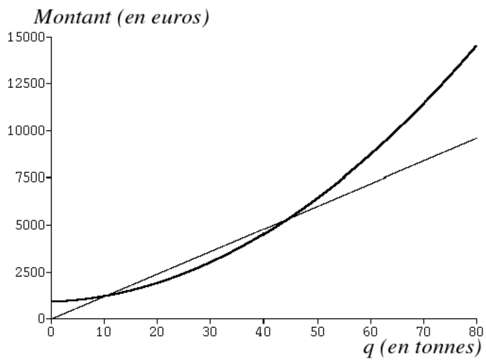
$$d) \quad -x^2+2x-3 \leqslant 0 \quad ; \quad e) \quad x^2+4x+4>0$$

Exercice 8.10. Le graphique ci-contre représente deux paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $y = x^2 - x - 3$ et $y = -x^2 + x + 1$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet S_1 de $\mathscr{P}_1$ et donner les variations de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 - x - 3$.
   Donner dans un tableau le signe de la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = -x^2 + x + 1$.
2. Résoudre l'inéquation $f_1(x) > f_2(x)$. Quelle est la signification graphique de la solution ?

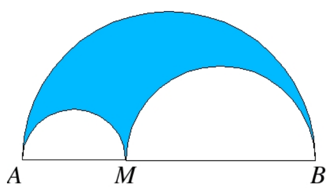


Exercice 8.11. Une entreprise produit de la farine de blé. On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentant la fonction coût total C (en gras) et la courbe représentant la fonction recette totale R.



1. Lire graphiquement les quantités de farine que doit produire l'entreprise pour que la production soit rentable.
2. On sait que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ et que $R(q) = 120q$. Reprendre la question 1. par le calcul.
3. Déterminer par le calcul la quantité produite quand le coût est 2500 €.
4. Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0;80[$ par $f(q) = R(q) - C(q)$. Quel est son maximum ? Que représente ce maximum dans ce problème ?

Exercice 8.12. $\mathscr{C}$ est un demi-cercle de rayon 5cm À l'intérieur de $\mathscr{C}$, on trace les demi-cercles de diamètres $[AM]$ et $[BM]$. Où placer M pour que l'aire coloriée soit maximale ?



Exercice 8.13. La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par A(0 ;1), B(1 ;-1) et C(3 ;1). Déterminer a, b, c.