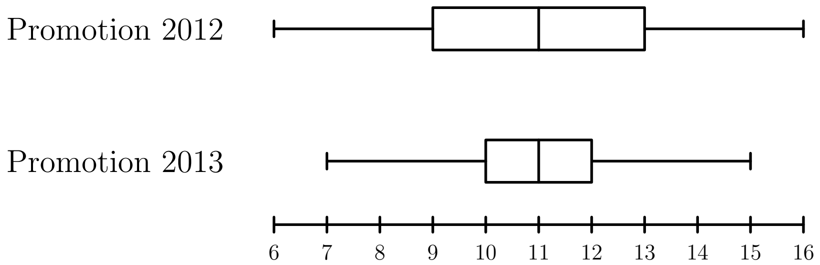
## 7.3 Solutions d'exercices

### Corrigé de l'exercice 7.1




1. Pour la promotion 2012, on peut dire qu'environ 50% des élèves avaient une note de français comprise entre 9 et 13 puisque $Q_1 = 9$ et $Q_3 = 13$. (on sait que 50% de la population se trouve entre ces deux quartiles).
2. Les notes médianes sont identiques pour les deux séries (11).

   Les notes de 2013 sont moins étendues (l'étendue en 2013 vaut $15-7=8$ et $16-6=10$ en 2012).

   Les notes de 2013 sont moins dispersées : 50% des élèves avaient une note de français comprise entre 10 et 12.

### Corrigé de l'exercice 7.2

| Nombre de buts $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de matchs $n_i$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |

1. Le nombre moyen de buts marqués par match lors de cette journée de championnat est

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} n_i} = \frac{33}{10} = \boxed{3{,}3}$$

2. L'écart-type de cette série statistique est

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \overline{x})^2} = \boxed{1{,}9}$$

### Corrigé de l'exercice 7.3

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PME A | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,8 | 2,1 | 2,2 | 4 | 6,6 |
| PME B | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,65 | 1,9 | 2,1 | 2,25 | 2,7 | 3 | 4,9 |

1. Le salaire moyen mensuel net pour chacune de ces PME est
   - dans la PME A : $\boxed{\overline{x}_A = 2{,}3}$, soit 2 300 €.
   - dans la PME B : $\boxed{\overline{x}_B = 2{,}3}$, soit 2 300 €.

   C'est le même.
2. Écart-type
   - dans la PME A : $\boxed{\sigma_A \simeq 1{,}647}$, soit 1 647 €.

- dans la PME B : $\boxed{\sigma_B \simeq 0{,}999}$, soit 999 €.

3. Les salaires sont plus dispersés dans la PME A.
   Les salaires moyens sont identiques mais le salaire médian est supérieur dans la PME B : 2 000 € contre 1 600 €.

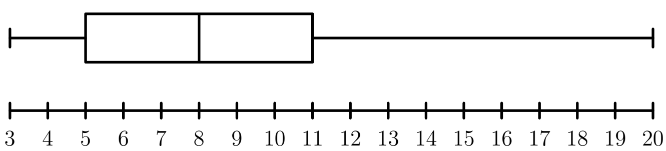
**Exercice 7.4**

| Nombre de demandes | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 17 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs (nombre de jours) | 1 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 |

1. L'effectif total est 22. Puisque cet effectif est pair et que $22 : 2 = 11$, la médiane est la moyenne des onzième et douzième valeurs (8 et 8) :

$$\boxed{M_e = 8}$$

$\dfrac{22}{4} = 5{,}5$ donc le 1<sup>er</sup> quartile est la 6<sup>e</sup> valeur : $\boxed{Q_1 = 5}$.
$3 \times \dfrac{22}{4} = 16{,}5$ donc le 3<sup>e</sup> quartile est la 17<sup>e</sup> valeur : $\boxed{Q_3 = 11}$.
Diagramme en boîte :




2. Comme le 3<sup>e</sup> quartile est 11, au moins 75% des valeurs sont inférieures ou égales à 11, donc il y a moins de 25% des valeurs qui dépassent 11. L'affirmation est fausse.

**Corrigé de l'exercice 7.5**

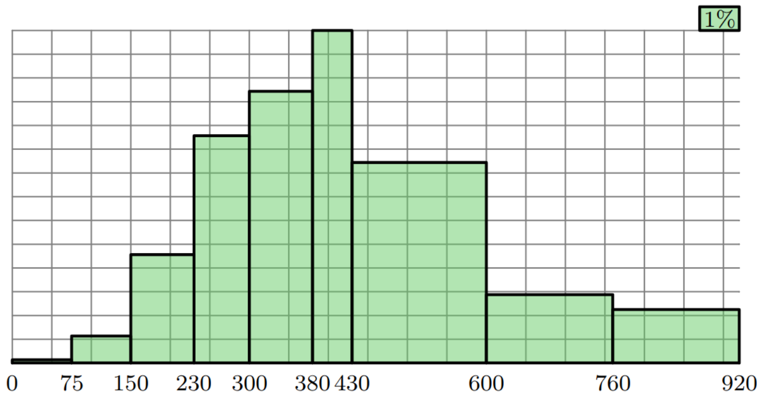
| Loyer (en € /mois) | Secteur HLM (en %) | Secteur libre (en %) |
|---|---|---|
| moins de 75 | 0,3 | 0,2 |
| de 75 à 150 | 3,7 | 1,7 |
| de 150 à 230 | 30,5 | 7,3 |
| de 230 à 300 | 35,1 | 13,4 |
| de 300 à 380 | 19,6 | 18,3 |
| de 380 à 430 | 5,6 | 14 |
| de 430 à 600 | 4,7 | 28,7 |
| de 600 à 760 | 0,3 | 9,2 |
| plus de 760 | 0,1 | 7,2 |

1. Histogramme du secteur libre :
2. Secteur HLM : le loyer médian est dans [230 ;300[,
   car $0{,}3 + 3{,}7 + 30{,}5 < 50\%$ et $0{,}3 + 3{,}7 + 30{,}5 + 35{,}1 > 50\%$
   Secteur libre : le loyer médian est dans [380 ;430[.
3. Secteur HLM. Le loyer mensuel moyen est

$$\overline{x}_1 = \frac{37{,}5 \times 0{,}3 + 112{,}5 \times 3{,}7 + \cdots + 840 \times 0{,}1}{100} \simeq \boxed{271{,}92\ €}$$

Secteur libre. Le loyer mensuel moyen est

$$\overline{x}_2 = \frac{37{,}5 \times 0{,}2 + 112{,}5 \times 1{,}7 + \cdots + 840 \times 7{,}2}{100} \simeq \boxed{441{,}13\ €}$$




Loyers du secteur libre en janvier 2003 (€/mois)

4. Le loyer mensuel en France en 2003 était

$$271{,}92 \times 0{,}435 + 441{,}13 \times 0{,}565 \simeq \boxed{367{,}52 \text{ €}}$$

**Corrigé de l'exercice 7.6**

| Nombre de plongées | $[0;10[$ | $[10;20[$ | $[20;30[$ | $[30;40[$ | $[40;50[$ | $[50;60[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,175 | 0,125 | 0,1 |

1. Le nombre moyen de plongées effectuées par plongeur est :

$$5 \times 0{,}1 + 15 \times 0{,}2 + 25 \times 0{,}3 + 35 \times 0{,}175 + 45 \times 0{,}125 + 55 \times 0{,}1 = 28{,}25$$

2. La médiane $m_e$ est dans $[20;30[$. Il faut partager cette classe proportionnellement à 0,2 et 0,1 (dessin) :

$$m_e = 20 + 10 \times \frac{0{,}2}{0{,}3} \simeq \boxed{26{,}7}$$

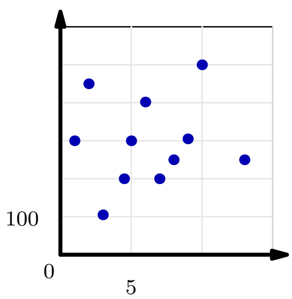
3. La deuxième année, il y a eu $70 \times 32 = 2240$ plongées.
La première : $80 \times 28{,}25 = 2260$.
Pour les deux ans : $2240 + 2260 = 4500$.
Le nombre moyen de plongées par plongeur sur les deux ans est :

$$\frac{4500}{80+70} = \boxed{30}$$

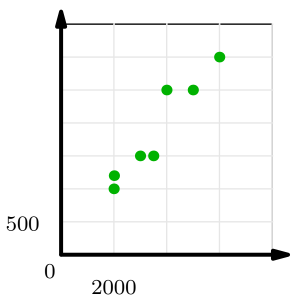
**Exercice 7.7**

1. Réponse b.
Le nuage de points pour lequel un ajustement affine semble judicieux est b.

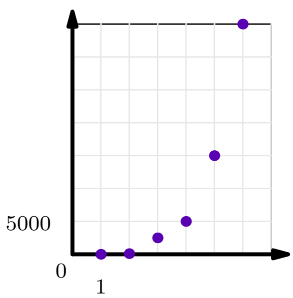
a .




b .

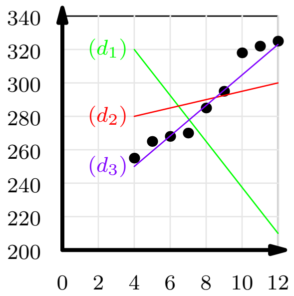



c .



Le nuage a semble difficilement ajustable. Pour le c, il faudrait envisager un ajustement de type exponentiel.

2. Réponse c.
La droite $(d_3)$ réalise le meilleur ajustement affine du nuage ci-dessous.




3. Réponse b.

| Année | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Cote $y_i$ (en euros) | 16 000 | 13 500 | 11 200 | 9 000 | 7 400 | 5 900 |

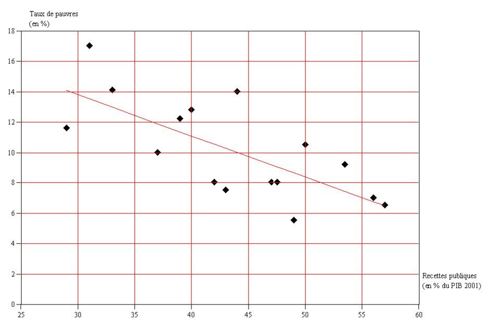
La droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation réduite (au centième)
$$u = -2028{,}57x + 17600$$
L'arrondi à la centaine la plus proche de $-2028{,}57$ est $-2000$.
On avait le choix entre : a. $y = -2100x + 17600$ b. $y = -2000x + 17600$ c. $y = -2100x + 17000$

4. Réponse a.
L'estimation du prix du véhicule de la question 3 en 2014 ($x = 8$), selon le modèle précédent est :
$$y = -2000 \times 8 + 17600 = 1600$$

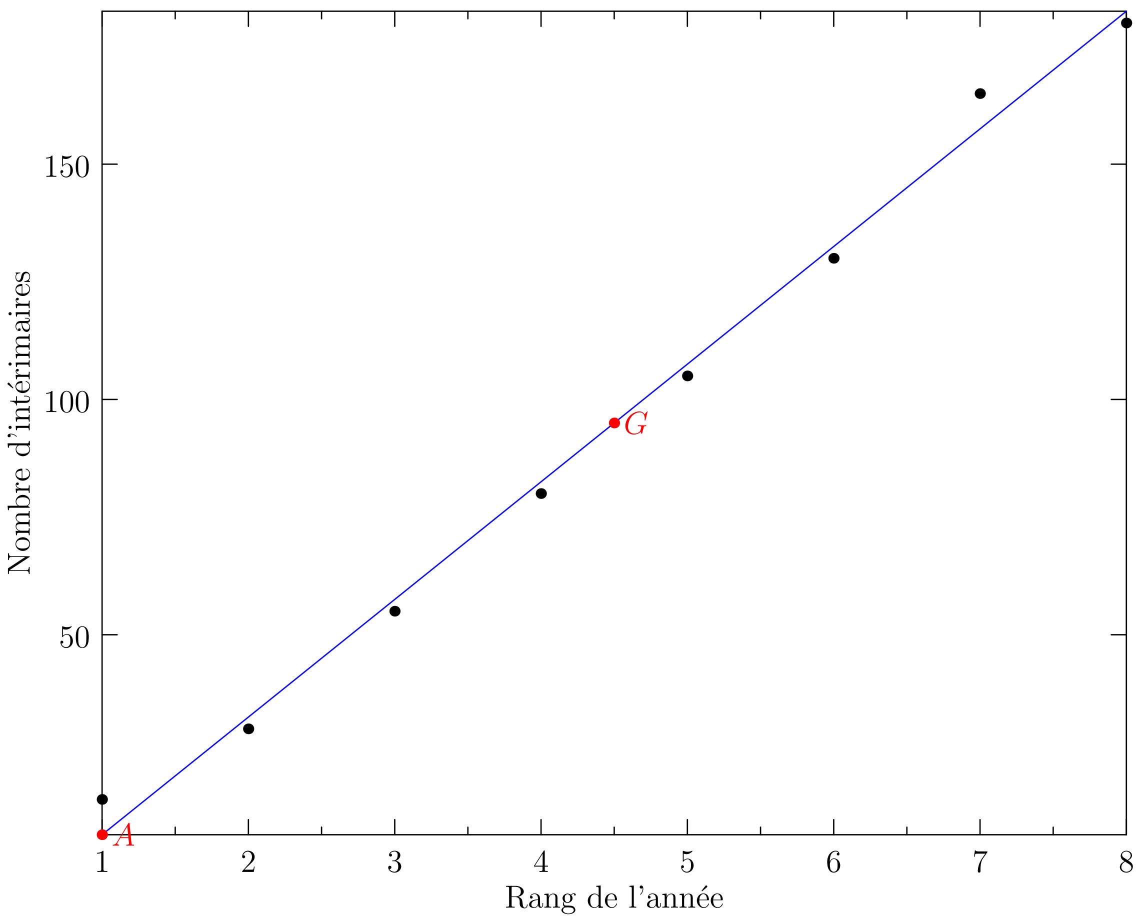
**Exercice 7.8**

La calculette nous indique :
— les coordonnées du point moyen sont environ : $(43{,}6; 10{,}1)$
— l'équation de la droite de régression de $y$ en $x$ est environ : $y = -0{,}27x + 21{,}95$

NB : un ajustement affine semble peu pertinent puisque le coefficient de corrélation linéaire $r \simeq -0{,}715$ n'est pas très proche de $-1$.




**Exercice 7.9**




1. Nuage
2. $G(4{,}5\ ;\ 95)$
3. Tracé de la droite $(AG)$.
4. Pour montrer que (d) a pour équation $y = 25x - 17{,}5$, il suffit de vérifier que les coordonnées de $A$ et celles de $G$ vérifient l'équation de (d) :

$$7{,}5 = 25 \times 1 - 17{,}5 \qquad \text{et} \qquad 95 = 25 \times 4{,}5 - 17{,}5$$

   Il faut savoir aussi déterminer l'équation d'une droite connaissant deux points : on note $y = ax + b$ cette équation.
   Le coefficient directeur $a$ se calcule par

$$a = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \frac{95 - 7{,}5}{4{,}5 - 1} = 25$$

   L'ordonnée à l'origine $b$ se calcule en écrivant qu'un des points ($A$ par exemple) est sur la droite :

$$y_A = 25x_A + b$$
$$7{,}5 = 25 \times 1 + b$$
$$7{,}5 - 25 = b$$
$$b = -17{,}5$$

5. On prend la droite (d) comme droite d'ajustement du nuage.

(a) À l'aide de l'équation de (d), une estimation du nombre prévsible d'intérimaires dans cette entreprise en 2018 est :

$$25 \times 9 - 17{,}5 = 207{,}5$$

(b) Avec le graphique, on retrouve le résultat précédent.

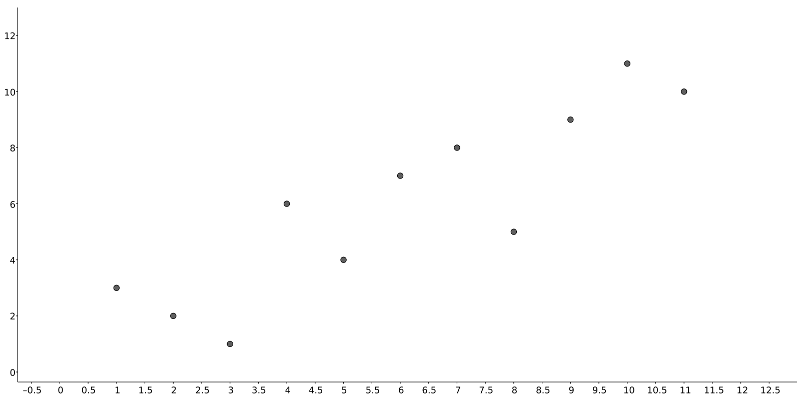
NB : l'équation de la droite de régression de $y$ en $x$ donnée par la calculatrice est, au centième :

$$y = 24{,}76x - 16{,}43$$

et $r \simeq 0{,}997$.

**Exercice 7.10**

| Emploi | Rang du salaire | Rang du stress |
|---|---|---|
| Agent de change | 9 | 9 |
| Zoologiste | 5 | 4 |
| Ingénieur en électricité | 8 | 5 |
| CPE | 6 | 7 |
| Gérant d'hôtel | 4 | 6 |
| Employé de banque | 1 | 3 |
| Inspecteur de la sécurité | 2 | 2 |
| Economiste | 3 | 1 |
| Psychologue | 7 | 8 |
| Pilote de l'air | 10 | 11 |
| Trader à Wall Street | 11 | 10 |

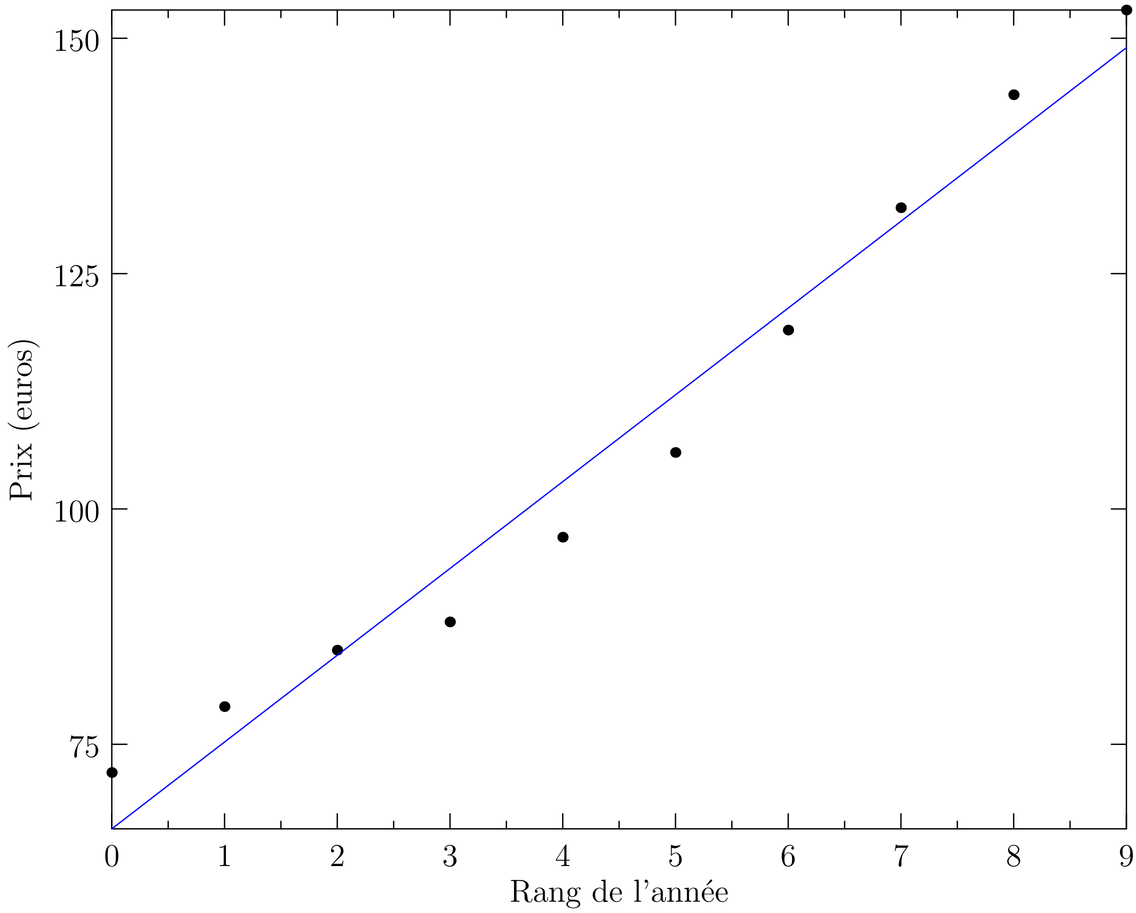



Le coefficient de corrélation linéaire est

$$r \simeq 0{,}882$$

...

**Exercice 7.11**




1. L'équation de la droite de régression de $y$ en $x$ est, en arrondissant au centième :

$$y = 9{,}22x + 66{,}02$$

   ($r \simeq 0{,}986$)

2. Au 1er janvier 2015, le prix peut être estimé à

$$9{,}22 \times 11 + 66{,}02 \simeq 167{,}44$$

   Pour estimer l'année (2018) au cours de laquelle ce prix dépassera 200 euros, on peut tâtonner ou résoudre

$$\begin{aligned} 9{,}22x + 66{,}02 &> 200 \\ 9{,}22x &> 200 - 66{,}02 \\ x &> \frac{200 - 66{,}02}{9{,}22} \\ &\simeq 14{,}53 \end{aligned}$$

**Exercice** **7.12**

| $x$ (ans) | 56 | 42 | 72 | 36 | 63 | 47 | 55 | 49 | 38 | 42 | 68 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ (mm Hg) | 147 | 125 | 160 | 118 | 149 | 128 | 150 | 145 | 115 | 140 | 152 | 155 |

Le coefficient de corrélation linéaire est $r \simeq 0{,}896$

**Exercice** **7.13**

| Années | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Taux d'équipement : $y_i$ | 44,7 | 49,6 | 54,3 | 58,7 | 62,8 | 66,7 | 69,7 | 73,2 |

**Partie A - Ajustement affine**

1. (a) Un ajustement affine semble indiqué sur la période 2004 à 2011 car les points du nuage semblent alignés.
   (b) Le coefficient de corrélation linéaire, arrondi au millième, de cette série est $r \simeq 0{,}997$.
   Il est proche de 1 : cela confirme la réponse à la question précédente.
2. Une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés est

$$y = 4{,}06x + 41{,}68$$

3. Le taux d'équipement (arrondi au dixième) prévu avec cet ajustement pour 2012 est :

$$y = 4{,}06 \times 9 + 41{,}68 \simeq 78{,}2$$

4. Pour déterminer par le calcul, à partir de quelle année le taux d'équipement dépassera les 85 %, on résout

$$4{,}06x + 41{,}68 \geqslant 85$$
$$4{,}06x \geqslant 85 - 41{,}68$$
$$x \geqslant \frac{85 - 41{,}68}{4{,}06}$$
$$x \geqslant 10{,}67$$

   On dépasse les 85 % fin 2014.
5. Pour déterminer par le calcul, à partir de quelle année le taux d'équipement dépassera les 100 %, on résout

$$4{,}06x + 41{,}68 \geqslant 100$$
$$4{,}06x \geqslant 100 - 41{,}68$$
$$x \geqslant \frac{100 - 41{,}68}{4{,}06}$$
$$x \geqslant 14{,}3$$

   On dépasse les 100 % fin 2018.

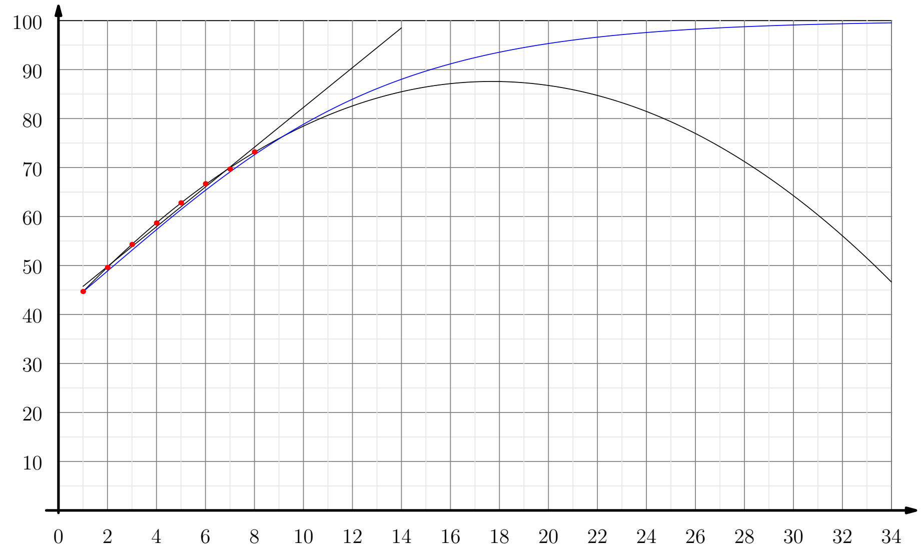
**Partie B - Ajustement proposé par un tableur**

$$f(x) = -0{,}154x^2 + 5{,}45x + 39{,}36$$

1. (a) $f'(x) = -0{,}308x + 5{,}45$
   (b) La fonction affine $f'(x)$ est positive sur $[1; 17{,}6948]$ et négative ensuite.
   (c) Tableau de variation de cette fonction
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 1 est

$$f'(1) = -0{,}308 \times 1 + 5{,}45 = 5{,}142$$

   (d) Tracé de la courbe représentative de $f$.




| $x$ | 1 | | 17,6948 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f$ | 44,656 | $\nearrow$ | 87,5783 | $\searrow$ | $-\infty$ |

2. À l'aide du graphique, on détermine que le taux d'équipement dépassera les 85 % entre 2017 et 2025 environ.
3. (a) L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ . En effet son discriminant est

$$\Delta = 5{,}45^2 - 4 \times (-0{,}154) \times 39{,}36 = 29{,}6958$$

Les solutions sue $\mathbb{R}$ sont

$$x_1 = \frac{-5.45 + \sqrt{29{,}6958}}{2 \times (-0{,}154} \simeq -6{,}152 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5.45 - \sqrt{29{,}6958}}{2 \times (-0{,}154} \simeq 41{,}542$$

(b) Les prévisions à long terme effectués à l'aide de cet ajustement ne semblent pas réalistes car la fonction $f$ est décroissante à partir de 2021 (il semble peu probable que le taux d'équipement diminue).

**Partie C - Avec une fonction logistique**

$$g(x) = \frac{100}{1 + 1{,}47e^{-0{,}17x}}$$

1. (a) Sachant que la limite de $e^{-0{,}17x}$ en $+\infty$ est 0, la limite de $g$ en $+\infty$ est $\dfrac{100}{1 + 1{,}47 \times 0} = 100$.
   (b) La droite d'équation $y = 100$ est asymptote à la courbe de $g$.
   (c) On en déduit que le taux d'équipement en micro-ordinateurs des ménages français va tendre vers 100%.
2. Avec ce dernier modèle, le taux d'équipement que l'on peut espérer atteindre en 2016 est

$$g(13) = \frac{100}{1 + 1{,}47e^{-0{,}17 \times 13}} \simeq \boxed{86{,}1}$$