Chapitre 4

Calcul matriciel

4.1 Matrices

4.1.1 Définition d'une matrice

Définition 3. n et p sont des entiers naturels. Une matrice A de dimension (n,p) (ou $n \times p$) est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes. L'élément a_{ij}, avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, se trouve sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{col } 1 & \text{col } 2 & \ldots & \text{col } j & \ldots & \text{col } p \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ligne } 1 \\ \text{ligne } 2 \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \text{ligne } n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples : les moyennes pour le premier semestre de quatre élèves en mathématiques, français, anglais sont écrites dans la matrice A de dimensions 4×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 15 & 8 & 10 \\ 8 & 17 & 2 \\ 11 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

On peut disposer les nombres dans l'autre sens et obtenir la *matrice transposée* de A (en échangeant les lignes et les colonnes : la ligne 1 devient la colonne 1 ...). Elle est notée A^t ou ${}^tA$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 8 & -11 \\ 12 & 8 & 17 & 9 \\ 14 & 10 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Cas particuliers :
— une matrice-ligne (comme C) est de dimension $1 \times p$
— une matrice-colonne (comme D) est de dimension $n \times 1$
— une matrice carrée (comme E) a autant de lignes que de colonnes

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 5{,}1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 \\ -\sqrt{2} & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Définition 4. Deux matrices sont égales si elles ont la même dimension et si les éléments situés à la même place sont égaux.

4.2 Calcul matriciel élémentaire

4.2.1 Addition

Définition 5. A et B sont deux matrices de mêmes dimensions. La matrice $A+B$ est obtenue en ajoutant les éléments situés à la même place.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Multiplication par un nombre réel

Définition 6. A est une matrice et k est un réel. La matrice $k \times A$ est obtenue en multipliant tous les éléments de A par k.

Exemples :

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$5\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Les moyennes de nos quatre élèves en mathématiques, français, anglais au deuxième semestre sont écrites dans la matrice B de dimensions 4×3 :

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 15 \\ 13 & 6 & 12 \\ 10 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 19 \end{pmatrix}$$

On peut calculer les moyennes annuelles par

$$M = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 15 & 8 & 10 \\ 8 & 17 & 2 \\ 11 & 9 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 8 & 15 \\ 13 & 6 & 12 \\ 10 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 19 \end{pmatrix}\right)$$

4.2.3 Multiplication de deux matrices

Définition 7. Produit d'une matrice ligne $1 \times p$ par une matrice colonne $p \times 1$: c'est un réel.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \cdots + a_{1p} \times b_{p1}$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$$

Définition 8. La multiplication d'une matrice A de taille $n \times p$ par B de taille $p \times m$ donne une matrice de taille $n \times m$.

L'élément c_{ij} (ligne i, colonne j) est obtenu en multipliant le vecteur-ligne i par le vecteur-colonne j.

$$\begin{array}{c} \\ \text{ligne } i \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{array}{c} \text{col } j \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Si on multiplie par la matrice identité (ou unité) I_2 : $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pour calculer la moyenne coefficientée de nos quatre élèves au premier semestre (coefficient 5 en mathématiques, 4 en français et 2 en anglais), on peut multiplier A à droite par la matrice 3×3 de coefficients et diviser par 11 :

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 15 & 8 & 10 \\ 8 & 17 & 2 \\ 11 & 9 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- En général, $A \times B \neq B \times A$.
- La multiplication est associative : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$.
- $A \times A$ est notée A^2 ...

4.3 Inverse d'une matrice

A étant carrée $n \times n$, une matrice B telle que $A \times B$ égale la matrice identité I_n est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}$$

4.3.1 Applications

Résolution de systèmes linéaires

Le système

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

s'écrit sous forme matricielle :

$$AX = C$$

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

En multipliant (à gauche !) les deux membres de $AX = C$ par A^{-1}, on obtient

$$A^{-1} \times AX = A^{-1} \times C$$

soit

$$I_2 X = A^{-1} \times C$$

$$X = A^{-1} \times C$$

Dans notre exemple,

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

C'est très pratique pour les systèmes 3×3 ou de taille plus grande, car les calculatrices et les ordinateurs calculent très rapidement $A^{-1} \times C$.

Exercices sur les matrices

Exercice 4.1. Dans un parc d'une ville, deux marchands ambulants vendent des beignets, des crêpes et des gaufres. On a noté les ventes de chacun pour samedi et dimanche derniers.

1er marchand			
	Beignets	Crêpes	Gaufres
Samedi	20	35	12
Dimanche	26	40	18

2ème marchand			
	Beignets	Crêpes	Gaufres
Samedi	30	40	22
Dimanche	30	48	38

On peut retenir l'information donnée par un tableau en conservant uniquement les nombres disposés de la même façon. On représente le 1er tableau par la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 12 \\ 26 & 40 & 18 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice B représentant le 2ème tableau.
2. Que valent a_{12}, a_{11}, a_{23}, b_{12} et b_{11} ?
3. Calculer $A + B$ et donner la signification de cette matrice.
4. Calculer $A - B$ et donner la signification de cette matrice.

5. Samedi et dimanche prochains, week-end de fête, on prévoit que les ventes vont augmenter de 50%. Par quel nombre k faut-il multiplier chacune des ventes du 1er marchand ? Écrire la matrice kA. Donner la matrice kB correspondant aux ventes du 2ème marchand.
6. Un beignet est vendu 2 euros, une crêpe 1 euro et une gaufre 1,50 euro.

   On note V la matrice des prix de vente, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$. Quelle opération matricielle donne le montant des ventes par jour pour le 1er marchand ? pour le 2ème marchand ?
7. Les deux marchands travaillent pour le compte du même patron, qui leur demande de calculer les coûts d'achats et les revenus pour chaque jour. Le coût d'achat d'un beignet est 0,40 euro, d'une crêpe 0,25 euro, d'une gaufre 0,30 euro.

   On note T la matrice donnant prix d'achat et prix de vente par catégorie,

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 2 \\ 0{,}25 & 1 \\ 0{,}3 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

   Quelle opération matricielle permet le calcul des coûts d'achat et revenus par jour pour le 1er marchand ?

   Calculer, de même, les coûts d'achats et les revenus par jour pour le 2ème marchand puis, globalement, pour le patron.

Exercice 4.2. 1. Calculer $3A - 2B$, $A \times B$ et $B \times A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

2. Calculer $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et

   $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer $A \times B$ et $C \times D$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et

   $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
4. Calculer A^3 avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
5. Calculer $A \times B$ et $B \times A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Exercice 4.3. L'inventaire des téléviseurs de type A et de type B, en stock dans trois points de vente de la grande chaîne Tardy, est donné par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 15 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

où les lignes indiquent les stocks de téléviseurs disponibles dans chacun des trois points de vente. Le prix de vente des téléviseurs de type A et de type B est donnée par la matrice-colonne

$$N = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit $M \times N$. Que représentent les nombres obtenus dans la matrice $M \times N$?

Exercice 4.4. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = O$ (O est la matrice dont les coefficients sont nuls).
2. En remarquant que $A = AI$, vérifier que cette égalité peut s'écrire $I = A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right)$.
3. En déduire la matrice A' telle que $A \times A' = I$.

Exercice 4.5. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice 4.6. Cryptographie

On veut transmettre un message secret en le codant de la façon suivante : on associe un nombre à chaque lettre du message grâce au tableau suivant, tableau public, à la disposition de tout le monde.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
2	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	%	'	,	?	;	.	:	!	espace

Par exemple, la lettre U est codée par le nombre 23.

1. Le message dont le texte est « top secret » donne 22 16 17 49 21 5 3 19 5 22, que l'on représente par une matrice de dimension 2×5, $M = \begin{pmatrix} 22 & 16 & 17 & 49 & 21 \\ 5 & 3 & 19 & 5 & 22 \end{pmatrix}$.
   On choisit toujours une dimension $2 \times p$, en ajoutant, si besoin, un espace à la fin du message. Ce tableau étant public, on ne peut pas envoyer la matrice M, décodable par tout le monde. On donne donc à la personne réceptrice du message une clé privée constituée d'une matrice P de dimension 2×2, et on lui envoie la matrice $C = P \times M$. On suppose que $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice C.
2. Quelles matrices obtient-on en multipliant chaque membre de l'égalité $C = P \times M$ par la matrice P^{-1} ?
3. Proposer un moyen de décoder un message M à partir du message codé C.
4. Vous recevez un message codé par la matrice de dimension 2×9

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 78 & 25 & 121 & 55 & 130 & 154 & 24 & 131 \\ -2 & 34 & -40 & -2 & 50 & 170 & 182 & -18 & 158 \end{pmatrix}$$

   À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, décoder le message en utilisant le procédé obtenu à la question précédente.
5. Quand on reçoit de nombreux messages, il est intéressant d'automatiser le décodage à l'aide d'un tableur.

(a) Fabriquer un fichier permettant cette automatisation. Indications :

— Saisir les données du tableau de codage dans la plage $A2 : B46$ (colonne A, les nombres de 1 à 49 sauf 10, 20, 30, 40).

— Saisir les éléments de la matrice C et de la matrice P puis calculer la matrice M.

— Dans la matrice M obtenue à la question 4, l'élément m_{11} est le nombre 2 qui correspond à la lettre B. Supposons qu'il soit dans la cellule $C7$. Pour chercher cette lettre B dans la plage $B2 : B49$, il suffit d'indiquer le numéro de la ligne où se trouve le nombre 2 :

$$= INDEX(\$B\$2 : \$B\$49; EQUIV(C7; \$A\$2 : \$A\$49))$$

(b) Utiliser votre fichier pour décoder le message suivant :

$$\begin{pmatrix} 27 & 31 & 54 & 48 & 58 & 75 & 115 & 52 & 115 \\ 6 & -12 & 22 & -6 & -86 & -60 & -10 & -94 & -10 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.7. 1. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, où a est un nombre réel. Déterminer a pour que le produit AB soit égal à $\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres réels. Déterminer les valeurs de a, b, c pour que l'on ait l'égalité matricielle suivante : $A \times B = C$.

Exercice 4.8. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 9 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -a & 8 \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel.

1. Déterminer le nombre réel a pour lequel : $M \times A = O$, où O est la matrice de dimension 3×3 dont tous les coefficients sont nuls.
2. Calculer le produit $A \times M$ pour la valeur de a obtenue.

Exercice 4.9. Un petit fournisseur de matériel informatique propose trois formules de vente à ses clients :

— une formule F1 ≪ clavier + souris ≫ à 12 euros ;

— une formule F2 ≪ clavier + souris + clé USB ≫ à 16 euros ;

— une formule F3 ≪ clavier ≫ à 10 euros.

Pour chacune de ces formules, dans le tableau suivant sont indiqués le coût d'achat du matériel, le temps moyen nécessaire au conditionnement de chaque formule et le prix demandé :

	Formule F1	Formule F2	Formule F3
Coût d'achat en euro	3	4	2
Temps en minute	8	10	6
Prix de vente en euro	12	16	10

1. (a) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 16 & 10 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Effectuer le produit matriciel MC.

(b) On considère le cas où 10 clients optent pour la formule F1, 8 pour la formule F2 et 14 pour la formule F3.

Donner la signification de chacun des coefficients du produit matriciel MC en termes de coût d'achat, de temps et de prix de vente.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & -1{,}5 & 0{,}5 \\ -2 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer les coefficients de la première ligne du produit matriciel PM.

   (b) Déterminer le réel a tel que le produit matriciel PM soit égal à la matrice unité 3×3.

3. Dans la suite de l'exercice on prend $a = -1$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM = I$. Soient X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes. Démontrer que si $MX = Y$ alors $X = PY$.

4. On sait que le fournisseur a dépensé 100 euros pour l'achat du matériel, que le conditionnement a nécessité 270 minutes et que la recette pour ces trois formules a été de 430 euros.

   Déterminer, pour chacune des formules, le nombre de clients l'ayant choisie.

Exercice 4.10. Extrait d'un exercice de BTS SIO

Partie A

Dans une société de service informatique, chaque client possède un numéro noté n, où n est un entier naturel non nul.

La notation $a \equiv b\ [k]$ signifie que le nombre a est congru au nombre b modulo k.

- Si $n \equiv 0\ [6]$, alors le client est suivi par le technicien A ;
- si $n \equiv 1\ [6]$ alors le client est suivi par le technicien B ;
- si $n \equiv 2\ [6]$ alors le client est suivi par le technicien C ;
- si $n \equiv 3\ [6]$ alors le client est suivi par le technicien D ;
- dans les autres cas, le client est suivi par le technicien E.

1. Par quel technicien est suivi le client numéro 51 ? Justifier la réponse.
2. Le client numéro 23 est-il suivi par technicien E ? Justifier la réponse.

Partie B

Pour permettre aux clients de la société d'accéder à leurs factures, le service comptable attribue un code à chacun d'entre eux.

Pour tout entier naturel n, le code attribué au client numéro n se calcule avec la formule

$$x + ny + n^2 z,$$

où x, y et z, sont trois nombres que les questions suivantes vont permettre de déterminer.

1. Sachant que le client numéro 1 a pour code le nombre 12, que le client numéro 2 a pour code le nombre 27 et que le client numéro 3 a pour code le nombre 50, écrire un système de trois équations vérifié par les nombres x, y et z.

2. On donne les matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 27 \\ 50 \end{pmatrix}$.

   Le système précédent s'écrit alors sous la forme matricielle : $M \times X = Y$.

   Résoudre ce système revient à déterminer la matrice X, ce que proposent les questions suivantes.

   (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel $P \times M$.

(b) En déduire que si $M \times X = Y$ alors $X = P \times Y$.

(c) Déterminer alors les nombres x, y et z.

Exercice 4.11. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire A^{-1}.

Exercice 4.12. Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40% des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20% des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges.

Partant d'une population (c_0, b_0), quelle est la population deux ans après ?

On introduit l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

soit $E_1 = A \times E_0$.

E_i représentant l'état de la population la i-ème année, montrer que

$$E_2 = A \times A \times E_0 = A^2 \times E_0$$

puis que $E_3 = A^3 \times E_0$, etc.

Étudier l'évolution sur n années ($n \geqslant 0$) suivant certains états initiaux et chercher pour quels états initiaux l'état du système est stable.

Montrer que si un état d'équilibre s'installe, c'est un état stable.

Exercice 4.13. Les fumeurs

Après avoir classé tous les individus d'une certaine population en « fumeur » et « non-fumeur », on a constaté que, d'une génération à l'autre, parmi les descendants de fumeurs, 3/5 sont des fumeurs et 2/5 des non-fumeurs et que, parmi les descendants de non-fumeurs, 1/5 sont des fumeurs et 4/5 des non-fumeurs. Si, dans la génération présente, la moitié de la population fume, quelle sera la proportion de fumeurs dans la prochaine génération ? dans deux générations ? Peut-on espérer la disparition des fumeurs autrement que par l'extinction de la population ? Si la population reste constante, y aura-t-il stabilisation du pourcentage de fumeurs après quelques générations ?

Exercice 4.14. Soient a et b des réels non nuls et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices B de dimension 2×2 qui commutent avec A, c'est-à -dire telles que $AB = BA$.