

Contrôle 2 de mathématiques pour l'informatique

La calculatrice est interdite.

Toute réponse sera justifiée. En particulier, toute réponse du type « C'est vrai. » ne sera pas prise en compte.

Exercice I

Compléter la table de vérité suivante.

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Exercice II

Établir la table de vérité de la proposition $(P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge Q)$. À quelle proposition plus simple est-elle équivalente ?

Exercice III

Que dire de la proposition $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$?

Exercice IV

Établir la table de vérité (à 8 lignes) de chacune des trois propositions :

- $(P \vee Q) \Rightarrow R$
- $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$
- $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

Certaines sont-elles équivalentes ?

Exercice V

1. Traduire en écriture symbolique (à l'aide de quantificateurs ...) la proposition suivante et déterminer sa valeur de vérité :

« tout nombre réel est inférieur ou égal à son carré »

Écrire ensuite la négation de cette proposition.

2. Traduire en français :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$$

Quelle est sa valeur de vérité ?

3. Que se passe-t-il si on change l'ordre des quantificateurs :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n = 2p ?$$

On rappelle que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...) et que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Exercice VI

Voici la table de vérité de l'inhibition :

P	Q	$P \ominus Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

1. La proposition $P \ominus Q$ est-elle équivalente à $Q \ominus P$?
2. Exprimer $P \ominus Q$ en utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
3. Montrer que les connecteurs de la logique propositionnelle $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ sont définissables à partir du seul connecteur $\ominus$ (dit autrement : écrire $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$ en n'utilisant que $\ominus$).

Corrigé du contrôle 2 de mathématiques pour l'informatique

Exercice I

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Exercice II

Table de vérité de la proposition $(P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge Q)$.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$(\neg P) \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge Q)$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

Elle est équivalente à Q .

Exercice III

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Les deux colonnes rouges sont identiques : la proposition $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ est vraie.

Exercice IV

Table de vérité (à 8 lignes) de chacune des trois propositions :

- $(P \vee Q) \Rightarrow R$
- $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$
- $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Deux propositions sont équivalentes : $(P \vee Q) \Rightarrow R$ et $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

Remarque : on peut le démontrer autrement ...

Exercice V

1. La proposition

« tout nombre réel est inférieur ou égal à son carré »

s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$$

C'est faux : par exemple, pour $x = 0,5$, $x^2 = 0,25$ et $x > x^2$.

La négation de cette proposition est

$$\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$ se lit par exemple : tout entier naturel est le double d'un autre entier naturel.

Cette proposition est fausse : il suffit de prendre un entier n impair.

3. Si on change l'ordre des quantificateurs :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n = 2p$$

C'est faux aussi : si un tel entier p existait, son double serait fixé et ce double ne pourrait pas être égal à tous les entiers naturels.

Exercice VI

Voici la table de vérité de l'inhibition :

P	Q	$P \ominus Q$	$Q \ominus P$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

1. La proposition $P \ominus Q$ n'est pas équivalente à $Q \ominus P$ comme le montre la table ci-dessus.
2. $P \ominus Q$ est équivalente à $P \wedge (\neg Q)$.
3. Montrons que les connecteurs de la logique propositionnelle $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ sont définissables à partir du seul connecteur $\ominus$

- En observant les tables ci-dessus quelques minutes, on trouve parfois que $P \wedge Q$ équivaut à $P \ominus (P \ominus Q)$.

P	Q	$P \ominus Q$	$P \ominus (P \ominus Q)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- $\neg P$ équivaut à $\mathcal{V} \ominus P$

P	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V} \ominus P$
0	1	1
1	1	0

- Comme $P \ominus Q$ équivaut à $\neg(P \Rightarrow Q)$, on en déduit que $\neg(P \ominus Q)$ équivaut à $P \Rightarrow Q$. On sait faire la négation avec uniquement $\ominus$: $\neg R$ équivaut à $\mathcal{V} \ominus R$. Il suffit de remplacer R par $(P \ominus Q)$.
Ainsi, $P \Rightarrow Q$ équivaut à

$$\mathcal{V} \ominus (P \ominus Q)$$

- $P \vee Q$ équivaut à $(\neg P) \Rightarrow Q$.

Dans l'expression de l'implication ci-dessus, il suffit de remplacer P par $\neg P$ ou encore par $(\mathcal{V} \ominus P)$. Ainsi $P \vee Q$ équivaut à

$$\mathcal{V} \ominus ((\mathcal{V} \ominus P) \ominus Q)$$