1SIO$_2$ 1 heure 16 octobre 2019

Contrôle 1 de mathématiques pour l'informatique

Dans tout le devoir, $(\dots)_b$ désigne un nombre en base 2, $(\dots)_h$ désigne un nombre en base 16. Un entier non entouré de parenthèses sera écrit dans le système décimal.

Exercice I

Convertir 250 en base 2, $(100011)_b$ en base 10, 257 en base 16, $(FAC)_h$ en base 2, $(C02)_h$ en base 10, $(10111)_b$ en base 16. Justifier rapidement les réponses.

Exercice II

Effectuer les opérations suivantes. Pour justifier les deux premières, montrer par exemple l'opération posée et les retenues éventuelles, ou … Aucune justification n'est demandée pour la dernière.

$$(101101)_b + (1111)_b \quad ; \quad (BAC)_h + (BEC)_h \quad ; \quad (1000)_b \times (1000)_b$$

Exercice III

(a) 1789 est-il premier ?

(b) 338 et 117 sont-ils premiers entre eux ?

(c) Décomposer en produit de facteurs premiers 20 000, 531 et 1769.

(d) Déterminer tous les diviseurs de 200.

(e) Déterminer $PGCD(60; 132)$, en montrant la méthode utilisée (la méthode « j'utilise la touche PGCD de la calculatrice » n'est pas acceptée).

Exercice IV

Compléter avec l'entier naturel le plus petit possible (et différent de 1) :

$38 \equiv \dots \quad (5) \quad ; \quad 180 \equiv \dots \quad (9) \quad ; \quad 131 \equiv 33 \quad (\dots) \quad ; \quad 2019^{2019} \equiv \dots \quad (2019)$

Exercice V

En informatique, le code ASCII associe à chaque caractère (lettre, chiffre, signe de ponctuation …) un entier compris entre 0 et 255 que l'on appelle son code ASCII.

La fonction CODE du tableur renvoie le code ASCII du caractère. L'extrait de tableur ci- dessous donne le codage des caractères Math.

A2 =CODE(A1)

	A	B	C	D
1	M	a	t	h
2	77	97	116	104

On décide de crypter le code ASCII ainsi : tout entier x tel que $0 \leqslant x \leqslant 255$, est crypté en X qui est le reste de la division euclidienne de $7x$ par 256.

1. Vérifier que le codage de la lettre M est 27.
2. Donner le codage du mot Math.
3. Expliquer pourquoi $183 \times X \equiv x \quad (256)$.
   Utiliser ceci pour décoder le message : 174 - 9 - 202.
4. Question bonus : x et y sont deux entiers compris entre 0 et 255. Ils sont codés en X et Y. Montrer que si $X = Y$, alors $7(x - y) \equiv 0 \quad (256)$. Quelle est la conséquence de ceci ?

SIO_1 1 heure 18 novembre 2015

Corrigé du contrôle 1 de mathématiques pour l'informatique

Exercice I

- $250 = (1111\ 1010)_b$
- $(100011)_b = 35$
- $257 = (101)_h$
- $(FAC)_h = (1111\ 1010\ 1100)_b$
- $(C02)_h = 3074$
- $(10111)_b = (17)_h$

Exercice II

- $(101101)_b + (1111)_b = (11\ 1100)_b$
  Ou en base décimale, $45 + 15 = 60$
- $(BAC)_h + (BEC)_h = (1798)_h$
  Ou en base décimale, $2988 + 3052 = 6040$
- $(1000)_b \times (1000)_b = (1\,000\,000)_b$

Exercice III

(a) 1789 est premier car il n'est divisible par aucun entier premier jusqu'à $\sqrt{1789} \simeq 42$.

(b) 338 et 117 ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par 13, donc leur PGCD est différent de 1.

(c) Décomposition en produit de facteurs premiers :
$20\,000 = 2^5 \times 5^4$
$531 = 3^2 \times 59$
$1769 = 29 \times 61$

(d) $200 = 2^3 \times 5^2$. Tous les diviseurs de 200 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 25 ; 40 ; 50 ; 100 ; 200 (il y en a 12 : $(3 + 1) \times (2 + 1)$).

(e) $PGCD(60; 132) = 12$ car $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ (le plus grand diviseur commun est $2^2 \times 3$).

Exercice IV

$38 \equiv 3 \quad (5)$
$180 \equiv 0 \quad (9)$
$131 \equiv 33 \quad (2)$
$2019 \equiv 0 \quad (2019)$ donc $2019^{2019} \equiv 0^{2019} \quad (2019)$, soit $2019^{2019} \equiv 0 \quad (2019)$

Exercice V

1. Le codage de la lettre M est 27. En effet,

$$7 \times 77 = 539 = 256 \times 2 + 27$$

donc

$$7 \times 77 \equiv 27 \quad (256)$$

2. Le codage du mot Math est

$$27 - 167 - 44 - 216$$

car 167, 44, et 216 sont les restes respectifs de 7×97, 7×116, 7×104 modulo 256.

3. • $7x \equiv X \quad (256)$ donc, en multipliant les deux membres par 183 :

$$183 \times 7x \equiv 183X \quad (256) \qquad \boxed{1}$$

• D'autre part, $183 \times 7 \equiv 1 \quad (256)$ donc, en multipliant les deux membres par x :

$$183 \times 7x \equiv x \quad (256) \qquad \boxed{2}$$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on déduit que $183 \times X \equiv x \quad (256)$.

$183 \times 174 \equiv 98 \quad (256)$
$183 \times 9 \equiv 111 \quad (256)$
$183 \times 202 \equiv 102 \quad (256)$
Le code ASCII de a est 97, donc 98 est celui de b, 102 est celui de f et 111 celui de o.
Le message codé en 174 - 9 - 202 est donc bof.

4. La question bonus montre que deux entiers distincts sont codés en deux entiers distincts.