1SIO$_2$ 1 heure 7 février 2020

Contrôle 3 de mathématiques pour l'informatique

Toute réponse devra être justifiée.

Exercice 1

1. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + 1 - \dfrac{1}{n+2}$ pour tout entier naturel n.
   Calculer w_1 et w_2.
2. La suite (a_n) est arithmétique, de premier terme $a_0 = 5$ et de raison 3.
   (a) Donner l'expression de a_n en fonction de n (pour tout entier naturel n).
   (b) Calculer a_{100}.
   (c) Calculer $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{30}$.
3. La suite (g_n) est géométrique, de premier terme $g_1 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{7}$.
   (a) Donner l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n (pour tout entier naturel n).
   (b) Calculer g_{30}.

Exercice 2

Après l'obtention de leur BTS SIO, Aurélien et Barbara sont employés dans deux entreprises différentes le 1er janvier 2015. Ces deux entreprises sont situées dans la zone euro ; l'euro est l'unité monétaire utilisée (notation €).
L'entreprise A propose à Aurélien un salaire annuel de 18 000 € en 2015, avec une augmentation annuelle de 380 €.
L'entreprise B propose à Barbara un salaire de 18 000 € en 2015, avec une augmentation annuelle de 2 %.
Pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les montants respectifs, en euro, des salaires annuels d'Aurélien et de Barbara, pour l'année $(2015 + n)$.

1. **Étude du salaire d'Aurélien**
   (a) Calculer le salaire annuel d'Aurélien en 2016 puis en 2017.
   (b) Déterminer la nature de la suite (a_n) et, pour tout entier naturel n, exprimer le nombre a_n en fonction de l'entier n.
   (c) Quel sera le salaire annuel d'Aurélien en 2025 ?
   (d) En indiquant la méthode utilisée, calculer le montant total que doit percevoir Aurélien, du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2025.
2. **Étude du salaire de Barbara**
   (a) Calculer le salaire annuel de Barbara en 2016 puis en 2017.
   (b) Déterminer la nature de la suite (b_n).
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $b_n = 18\,000 \times 1{,}02^n$.
   (d) Quel sera, arrondi au centime d'euro, le salaire annuel de Barbara en 2025 ?
3. **Comparaison des deux salaires**

   À l'aide de la calculatrice, comparer, pour les années allant de 2015 à 2030, les salaires de Barbara et Aurélien.
   Expliquer la démarche.

Exercice 3

Cet exercice étudie la suite (u_n) dont les termes sont définis par leur écriture en base deux : $u_0 = 1$, et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = (1{,}1\ldots1)_2$ où sont écrits n chiffres 1 à droite de la virgule. La notation $(\ldots)_2$ signifie que le nombre est écrit en base 2.
Par exemple :

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1{,}1)_2 = 1 + \frac{1}{2}\\
u_2 &= (1{,}11)_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\\
u_3 &= (1{,}111)_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

1. Justifier le fait que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. Déterminer l'écriture décimale du nombre u_6.
3. On admet dans cette question que, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

   Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
4. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

1SIO$_2$ 1 heure 7 février 2020

Corrigé du contrôle 3 de mathématiques pour l'informatique

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = w_n + 1 - \dfrac{1}{n+2}$.

$$w_1 = w_0 + 1 - \frac{1}{0+2}$$
$$w_1 = 1 + 1 - \frac{1}{2}$$
$$\boxed{w_1 = \frac{3}{2}}$$

$$w_2 = w_1 + 1 - \frac{1}{1+2}$$
$$w_2 = \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{3}$$
$$\boxed{w_2 = \frac{13}{6}}$$

2. La suite (a_n) est arithmétique, de premier terme $a_0 = 5$ et de raison 3.
   (a) Pour tout n,
$$a_n = a_0 + 3n$$
$$\boxed{a_n = 5 + 3n}$$
   (b)
$$a_{100} = 5 + 3 \times 100$$
$$\boxed{a_{100} = 305}$$
   (c)
$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{30} = \underbrace{31}_{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{a_0 + a_{30}}{2}}_{\text{moyenne de 1er et du dernier}}$$
$$= 31 \times \frac{5 + 95}{2}$$
$$= \boxed{1550}$$

3. La suite (g_n) est géométrique, de premier terme $g_1 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{7}$.
   (a) Pour tout entier naturel n, $\boxed{g_{n+1} = \dfrac{1}{7} \times g_n}$
   (b)
$$g_{30} = g_1 \times \left(\frac{1}{7}\right)^{29}$$
$$g_{30} = 3 \times \left(\frac{1}{7}\right)^{29}$$
$$g_{30} \simeq 9{,}32 \times 10^{-25}$$

Exercice 2

1. **Étude du salaire d'Aurélien**
   (a) Le salaire annuel d'Aurélien en 2016 sera : $a_1 = 18\,000 + 380 = 18\,380$€.
   En 2017 ce sera : $a_2 = a_1 + 380 = 18\,760$€.
   (b) La suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 380, car on passe d'un terme au suivant en ajoutant 380.
   L'expression de a_n en fonction de n est : $\boxed{a_n = 18000 + 380n}$.
   (on sait que $a_n = a_0 + 380n$)
   (c) Le salaire annuel d'Aurélien en 2025 sera
   $$a_{10} = 18\,000 + 380 \times 10 = 21\,800\text{€}$$
   (d) Le montant total que doit percevoir Aurélien, du 1er janvier 2015 au 31 décembre 2025 est
   $$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} &= 11 \times \frac{a_0 + a_{10}}{2} \\ &= 11 \times \frac{18\,000 + 21\,800}{2} \\ &= \boxed{218\,900\text{€}} \end{aligned}$$

2. **Étude du salaire de Barbara**
   (a) Le salaire annuel de Barbara en 2016 sera $b_1 = 18\,000 \times 1{,}02 = 18\,360$€
   et en 2017 : $b_2 = b_1 \times 1{,}02 = 18\,727{,}2$€
   (b) La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,02, car on passe d'un terme au suivant en multipliant par 1,02.
   (c) Pour tout entier naturel n, on a : $b_n = b_0 \times 1{,}02^n = 18\,000 \times 1{,}02^n$.
   (d) Le salaire annuel de Barbara en 2025 sera
   $$b_{10} = 18\,000 \times 1{,}02^{10} \simeq 21\,941{,}90\text{€}$$

3. **Comparaison des deux salaires**
   À l'aide de la calculatrice, on observe qu'avant 2021, Aurélien a un salaire annuel plus élevé ($a_6 = 20\,280$ contre $b_6 = 20\,270{,}92$), puis c'est Barbara ($a_7 = 20\,660$ contre $b_7 = 20\,676{,}34$).
   On a entré les fonctions $Y_1 = 18000 + 380X$ et $Y_2 = 18000 \times 1{,}02^X$ et demandé un tableau de valeurs pour X allant de 0 à 15. L'année 2021 correspond à $X = 6$:

X	Y_1	Y_2
0	18000	18000,00
1	18380	18360,00
2	18760	18727,20
3	19140	19101,74
4	19520	19483,78
5	19900	19873,45
6	20280	20270,92
7	20660	20676,34
8	21040	21089,87
9	21420	21511,67
10	21800	21941,90
11	22180	22380,74
12	22560	22828,35
13	22940	23284,92
14	23320	23750,62
15	23700	24225,63

Exercice 3

1.

$$u_1 = (1{,}1)_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$u_2 = (1{,}11)_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2}$ est différent de $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{4}$ donc la suite n'est pas arithmétique.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{3}{2}$ est différent de $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{7}{6}$ donc la suite n'est pas géométrique.

2. u_6 est la somme de 7 termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$:

$$u_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^6}$$
$$u_6 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$\boxed{u_6 \simeq 1{,}984\,375}$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$
$$u_n = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$u_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. La suite u_n est croissante. En tâtonnant :

$$u_9 \simeq 1{,}998 < 1{,}999$$
$$u_{10} \simeq 1{,}999\,023 > 1{,}999$$

$\boxed{\text{La plus petite valeur de } n \text{ telle que } u_n > 1{,}999 \text{ est } 10.}$