$1SIO_2$ 1 heure 10 octobre 2016

Contrôle 1 de mathématiques pour l'informatique

Dans tout le devoir, $(\ldots)_b$ désigne un nombre en base 2, $(\ldots)_h$ désigne un nombre en base 16. Un entier non entouré de parenthèses sera écrit dans le système décimal.

Exercice I

1. (a) 701 est-il premier ? Justifier la réponse.
   (b) Donner la décomposition en produits de facteurs premiers de 2262 en faisant apparaître la démarche.
   (c) En déduire tous les diviseurs de 2262.
2. Calculer à la calculatrice $A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$. Donner la décomposition en produits de facteurs premiers de A.

Exercice II

Déterminer le PGCD de 1596 et 190, en montrant la méthode utilisée (la méthode ≪ j'utilise la touche PGCD de la calculatrice ≫ n'est pas acceptée).

Exercice III

Compléter les divisions

$$\begin{array}{r|l} 4\,0\,2\,4\,6 & 4\,1\,3 \\ \cline{2-2} \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,7 \\ 1\,8\,5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7\,6\,4 & 2\,3 \\ \cline{2-2} \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \end{array}$$

Exercice IV

1. Convertir 130 en base 2, $(101011)_b$ en base 10, 300 en base 16, $(BAC6)_h$ en base 2, $(1B6)_h$ en base 10, $(10011)_b$ en base 16 (on ne demande pas de justification).
2. Poser en base 2 l'addition (montrer les éventuelles retenues) : $(1011)_b + (110)_b$.
3. Donner le résultat en base 2, de $(1011)_b \times (1000)_b$ (on ne demande pas de justification).

Exercice V

Compléter avec l'entier naturel le plus petit possible (on ne demande pas de justification) :

$42 \equiv \ldots \quad (5)$; $63 \equiv \ldots \quad (7)$; $100 \equiv 10 \quad (\ldots)$; $9^{9999} \equiv \ldots \quad (8)$

Exercice VI

Un nombre x est codé en un nombre y tel que

$$\begin{cases} y \equiv 7x \quad \text{modulo } 26 \\ 0 \leqslant y \leqslant 25 \end{cases}$$

Pour coder une lettre de l'alphabet, on utilise la correspondance habituelle :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Ainsi, la lettre P, qui correspond à $x = 15$, est codée en B, car $1 \equiv 7 \times 15 \quad$ modulo 26.

1. Coder le mot ≪ LYCEE ≫.
2. Expliquer pourquoi $7 \times 15 \equiv 1 \quad$ modulo 26.
3. Prouver que $15y \equiv x \quad$ modulo 26.
4. Décoder le mot ≪ HUJ ≫.

Questions bonus

1. Déterminer PGCD$(2n\ ,\ 2n+2)$ pour tout entier naturel n.
2. Prouver que la somme trois nombres entiers consécutifs (non nuls) n'est pas un nombre premier.
3. Prouver que pour tout entier naturel n, le produit $n^2(n+1)(n-1)$ est divisible par 12.

SIO_1 1 heure 10 octobre 2016

Corrigé du contrôle 1 de mathématiques pour l'informatique

Exercice I

1. (a) 701 est premier car il n'est divisible par aucun nombre premier inférieurà $\sqrt{701} \simeq 26{,}5$.

   (b) La décomposition en produits de facteurs premiers de 2262 est

   $$2262 = 2 \times 3 \times 13 \times 29$$

   (c) On en déduit tous les diviseurs de 2262 :

   $1\,;\,2\,;\,3\,;\,13\,;\,29$

   $2 \times 3 = 6\,;\, 2 \times 13 = 26\,;\, 2 \times 29 = 58\,;\, 3 \times 13 = 39\,;\, 3 \times 29 = 87\,;\, 13 \times 29 = 377$ (en prenant les facteurs deux par deux)

   $2 \times 3 \times 13 = 78\,;\, 2 \times 3 \times 29 = 174\,;\, 2 \times 13 \times 29 = 754\,;\, 3 \times 13 \times 29 = 1131$(en prenant les facteurs trois par trois)

   2262

   On a 16 diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 13 ; 26 ; 29 ; 39 ; 58 ; 78 ; 87 ; 174 ; 377 ; 754 ; 1131 ; 2262.

2. $A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$. La décomposition en produits de facteurs premiers de A est

$$\begin{aligned} A &= 1 \times 2 \times 3 \times \underbrace{4}_{2^2} \times 5 \times \underbrace{6}_{2\times 3} \times 7 \times \underbrace{4}_{2^3} \times \underbrace{9}_{3^2} \times \underbrace{10}_{2\times 5} \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}$$

Exercice II

Déterminons le PGCD de 1596 et 190.
$1596 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 19$ et $190 = 2 \times 5 \times 19$ donc

$$\text{PGCD}(1596; 190) = 2 \times 19 = 38$$

Exercice III

Compléter les divisions

$$\begin{array}{r|l} 4\,0\,2\,4\,6 & 4\,1\,3 \\ \cline{2-2} 3\,0\,7\,6 & 9\,7 \\ 1\,8\,5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7\,6\,4 & 2\,3 \\ \cline{2-2} 7\,4 & 3\,3 \\ 5 & \end{array}$$

Exercice IV

1. $130 = (10000010)_b$
   $(101011)_b = 43$
   $300 = (12C)_h$
   $(BAC6)_h = (1011101011000110)_2$
   $(1B6)_h = 438$
   $(10011)_b = (13)_h$

2.
$$\begin{array}{rccccc} & {}^{1} & {}^{1}1 & {}^{1}0 & 1 & 1 \\ + & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3. $(1011)_b \times (1000)_b = (1011000)_b$

Exercice V

Compléter avec l'entier naturel le plus petit possible (on ne demande pas de justification) :

$42 \equiv 2 \quad (5)$; $63 \equiv 0 \quad (7)$; $100 \equiv 10 \quad (1)$; $9^{9999} \equiv 1 \quad (8)$

Exercice VI

Un nombre x est codé en un nombre y tel que

$$\begin{cases} y \equiv 7x \quad \text{modulo } 26 \\ 0 \leqslant y \leqslant 25 \end{cases}$$

Ainsi, la lettre P, qui correspond à $x = 15$, est codée en B, car $1 \equiv 7 \times 15 \quad$ modulo 26.

1. Codage du mot « LYCEE »
   L, qui correspond à $x = 11$, est codée en Z , car $25 \equiv 7 \times 11 \quad$ modulo 26.
   Y, qui correspond à $x = 24$, est codée en M , car $12 \equiv 7 \times 11 \quad$ modulo 26.
   C, qui correspond à $x = 2$, est codée en O , car $14 \equiv 7 \times 2 \quad$ modulo 26.
   E, qui correspond à $x = 4$, est codée en C , car $2 \equiv 7 \times 4 \quad$ modulo 26.
   LYCEE est donc codé en ZMOCC.
2. $7 \times 15 \equiv 1 \quad$ modulo 26 car le reste de la division euclidienne de 105 par 26 est 1 :
$$105 = 4 \times 26 + 1$$
3.
$$\left.\begin{array}{l} y \equiv 7x \quad (26) \text{ donc } 15y \equiv 15 \times 7x \quad (26) \\ 15 \times 7 \equiv 1 \quad (26) \text{ donc } 15 \times 7x \equiv x \quad (26) \end{array}\right\} \text{donc } 15y \equiv x \quad (26)$$
4. Décodage du mot « HUJ ».
   H, qui correspond à $y = 7$, est décodée en B , car $1 \equiv 15 \times 7 \quad (26)$.
   U, qui correspond à $y = 20$, est décodée en O , car $14 \equiv 15 \times 20 \quad (26)$.
   J, qui correspond à $y = 9$, est décodée en F , car $5 \equiv 15 \times 9 \quad (26)$.
   Le mot de départ est BOF.