BTS SIO

Suites numériques

Lycée Carcouët

4 mai 2021

Résumé

1. Génération de suites de nombres

2. Suites arithmétiques et suites géométriques
   - Suites arithmétiques
   - Suites géométriques
   - Représentation graphique

3. Exercices

Distinguer les deux types de suites :

- $\boxed{\mathsf{u_{n+1} = f(u_n)}}$

  exemple : $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n

  $$u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$$

  Pour calculer u_{100}, il faut calculer tous les termes précédents.

- $\boxed{\mathsf{u_n = f(n)}}$

  exemple : $u_n = n^2 + 3n$ pour tout entier naturel n
  Pour calculer u_{100}, il suffit de faire

  $$u_{100} = 100^2 + 3 \times 100 = 10300$$

Nous allons étudier deux types importants de suites : les suites arithmétiques et les suites géométriques.
Ce ne sont pas les seules : il existe une infinité de suites qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

Résumé

1. Génération de suites de nombres
2. Suites arithmétiques et suites géométriques
   - Suites arithmétiques
   - Suites géométriques
   - Représentation graphique
3. Exercices

Résumé

1 Génération de suites de nombres

2 Suites arithmétiques et suites géométriques
- Suites arithmétiques
- Suites géométriques
- Représentation graphique

3 Exercices

Une suite de nombres est **arithmétique** si chaque terme s'obtient en ajoutant un même nombre au précédent :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + a} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

u_n est appelé terme de rang n et a est la raison de la suite.

$$u_0 \xrightarrow{+a} u_1 \xrightarrow{+a} u_2 \xrightarrow{+a} u_3 \xrightarrow{+a} \ldots \qquad u_n \xrightarrow{+a} u_{n+1} \qquad \ldots$$

Exemples :

- 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27 ... est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 5.

Exemples :

- 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27 ... est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 5.
- Les entiers naturels forment une suite arithmétique de raison 1. Chaque terme se déduit du précédent en ajoutant 1. Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n =$$

Exemples :

- 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27 ... est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 5.
- Les entiers naturels forment une suite arithmétique de raison 1. Chaque terme se déduit du précédent en ajoutant 1. Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = u_{n-1} + 1$$

Exemples :

- 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27 ... est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 5.
- Les entiers naturels forment une suite arithmétique de raison 1. Chaque terme se déduit du précédent en ajoutant 1. Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = u_{n-1} + 1$$

- Les entiers naturels pairs forment une suite de raison 2 :

$$0; 2; 4; 6; 8 \dots$$

Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n :

$$u_{n+1} =$$

Exemples :

- 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27 ... est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 5.
- Les entiers naturels forment une suite arithmétique de raison 1. Chaque terme se déduit du précédent en ajoutant 1. Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = u_{n-1} + 1$$

- Les entiers naturels pairs forment une suite de raison 2 :

$$0; 2; 4; 6; 8 \dots$$

Ils forment la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n :

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

Pour prouver qu'une suite est arithmétique, on calcule pour tout n la différence $u_{n+1} - u_n$; ce doit être une constante.

Pour l'instant, on sait passer d'un terme au suivant. On connaît u_0, puis on calcule u_1 puis u_2 puis .... Dans la suite A (de premier terme 10 et de raison -2), pour calculer u_{100}, il faut calculer tous les précédents.
Il serait intéressant de savoir passer directement de u_0 à u_{100}.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "-2"] \arrow[rrrrr, bend right, dotted] & u_1 \arrow[r, "-2"] & u_2 \arrow[r, "-2"] & u_3 \arrow[r, "-2"] & \dots & u_{100} \end{tikzcd}$$

$u_{100} =$

Terme général d'une suite arithmétique

Appelons u_0 le premier terme d'une suite arithmétique de raison a.
Écrivons les termes de cette suite :

u_0

$u_1 = u_0 + a$

Terme général d'une suite arithmétique

Appelons u_0 le premier terme d'une suite arithmétique de raison a.
Écrivons les termes de cette suite :

u_0

$u_1 = u_0 + a$

$u_2 = u_1 + a = u_0 + a + a = u_0 + 2a$

Terme général d'une suite arithmétique

Appelons u_0 le premier terme d'une suite arithmétique de raison a.
Écrivons les termes de cette suite :

u_0

$u_1 = u_0 + a$

$u_2 = u_1 + a = u_0 + a + a = u_0 + 2a$

$u_3 = u_2 + a = u_0 + 2a + a = u_0 + 3a$

$\vdots$

Terme général d'une suite arithmétique

Appelons u_0 le premier terme d'une suite arithmétique de raison a.
Écrivons les termes de cette suite :

u_0
$u_1 = u_0 + a$
$u_2 = u_1 + a = u_0 + a + a = u_0 + 2a$
$u_3 = u_2 + a = u_0 + 2a + a = u_0 + 3a$
$\vdots$
$u_n = u_0 + na$

Pour calculer le terme de rang n :

$$\boxed{u_n = u_0 + na}$$

$$u_0 \xrightarrow{+a} u_1 \xrightarrow{+a} u_2 \xrightarrow{+a} u_3 \xrightarrow{+a} \dots \qquad u_n$$

Exemple : soit la suite (u_n), arithmétique, de raison 5, de premier terme $u_0 = 2$.

$$\begin{aligned} u_{100} &= u_0 + 100 \times 5 \\ &= 2 + 500 \\ &= 502 \end{aligned}$$

Somme des n premiers entiers

On veut calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Somme des n premiers entiers

On veut calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{lccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Somme des n premiers entiers

On veut calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{cccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Ajoutons ces deux lignes :
$2S =$

Somme des n premiers entiers

On veut calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Ajoutons ces deux lignes :
$2S =$

$2S =$

Somme des n premiers entiers

On veut calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Ajoutons ces deux lignes :
$2S =$

$2S =$

Donc

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

Par exemple, la somme des 100 premiers entiers est :

$$1+2+3+\cdots+100=\frac{100(100+1)}{2}=\frac{100\times 101}{2}=5050$$

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on utilise la même ruse.
Exemple : calculons $1 + 3 + 5 + \cdots + 4999 + 5001$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 4999 + 5001$$

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on utilise la même ruse.
Exemple : calculons $1 + 3 + 5 + \cdots + 4999 + 5001$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{cccccccccccc} S = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & 4999 & + & 5001 \\ S = & 5001 & + & 4999 & + & 4997 & + & \ldots & + & 3 & + & 1 \end{array}$$

Ajoutons ces deux lignes :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on utilise la même ruse.
Exemple : calculons $1 + 3 + 5 + \cdots + 4999 + 5001$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & 4999 & + & 5001 \\ S = & 5001 & + & 4999 & + & 4997 & + & \dots & + & 3 & + & 1 \end{array}$$

Ajoutons ces deux lignes :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2S = & 5002 & + & 5002 & + & 5002 & + & \dots & + & 5002 & + & 5002 \end{array}$$

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on utilise la même ruse.

Exemple : calculons $1 + 3 + 5 + \cdots + 4999 + 5001$.

On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & 4999 & + & 5001 \\ S = & 5001 & + & 4999 & + & 4997 & + & \ldots & + & 3 & + & 1 \end{array}$$

Ajoutons ces deux lignes :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} 2S = & 5002 & + & 5002 & + & 5002 & + & \ldots & + & 5002 & + & 5002 \\ 2S = & 2501 & \times & 5002 & & & & & & & & \end{array}$$

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on utilise la même ruse.
Exemple : calculons $1 + 3 + 5 + \cdots + 4999 + 5001$.
On écrit la somme dans les deux sens :

$$\begin{array}{rccccccccccc} S = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & 4999 & + & 5001 \\ S = & 5001 & + & 4999 & + & 4997 & + & \dots & + & 3 & + & 1 \end{array}$$

Ajoutons ces deux lignes :

$$\begin{array}{rccccccccccc} 2S = & 5002 & + & 5002 & + & 5002 & + & \dots & + & 5002 & + & 5002 \\ 2S = & 2501 & \times & 5002 & & & & & & & & \end{array}$$

$$S = \underbrace{2501}_{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{5002}{2}}_{\text{moyenne de 1er et du dernier}}$$

Au lieu de refaire cette ruse à chaque fois, on retiendra :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{somme de termes}\\\text{d'une suite arithmétique}\end{array} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}}$$

NB : cette formule permet aussi de calculer $1 + 2 + 3 + \cdots + n$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n \times \frac{1+n}{2}$$

Résumé

1. Génération de suites de nombres

2. Suites arithmétiques et suites géométriques
   - Suites arithmétiques
   - Suites géométriques
   - Représentation graphique

3. Exercices

Une suite de nombres est géométrique si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre :

$$\boxed{u_{n+1} = b \times u_n}$$

b est la <u>raison</u> de la suite.

Exemples :

- La suite suite géométrique de premier terme 16 et de raison 1,5 a pour premiers termes :

$$16 \qquad 24 \qquad 36 \qquad 54 \qquad \ldots$$

Exemples :

- La suite suite géométrique de premier terme 16 et de raison 1,5 a pour premiers termes :

$$16 \qquad 24 \qquad 36 \qquad 54 \qquad \dots$$

- Les premiers termes de la suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme 10 sont :

$$10 \qquad 2 \qquad 0{,}4 \qquad 0{,}08 \qquad \dots$$

Terme général d'une suite géométrique

Appelons u_0 le premier terme d'une suite géométrique de raison b.

$$u_0 \xrightarrow{\times b} u_1 \xrightarrow{\times b} u_2 \xrightarrow{\times b} u_3 \xrightarrow{\times b} \dots \dashrightarrow u_n$$

Terme général d'une suite géométrique

Appelons u_0 le premier terme d'une suite géométrique de raison b.

$$u_0 \xrightarrow{\times b} u_1 \xrightarrow{\times b} u_2 \xrightarrow{\times b} u_3 \xrightarrow{\times b} \dots \dashrightarrow u_n$$

Écrivons les termes de cette suite :

u_0

$u_1 = b \times u_0$

$u_2 = b \times u_1 = b \times (b \times u_0) = b^2 \times u_0$

$u_3 = b \times u_2 = b \times (b^2 \times u_0) = b^3 \times u_0$

$\vdots$

$u_n = b^n \times u_0$

Pour calculer le terme de rang n :

$$\boxed{u_n = b^n \times u_0}$$

Calcul de $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots + b^n$

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S = & 1 & + & b & + & b^2 & + & b^3 & + & \ldots & + & b^{n-1} & + & b^n \\ b \times S = & b & + & b^2 & + & b^3 & + & b^4 & + & \ldots & + & b^n & + & b^{n+1} \end{array}$$

Calcul de $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots + b^n$

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S = & 1 & + & b & + & b^2 & + & b^3 & + & \dots & + & b^{n-1} & + & b^n \\ b \times S = & b & + & b^2 & + & b^3 & + & b^4 & + & \dots & + & b^n & + & b^{n+1} \end{array}$$

On soustrait ces deux lignes :
$S - b \times S = 1 - b^{n+1}$

Calcul de $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots + b^n$

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S = & 1 & + & b & + & b^2 & + & b^3 & + & \ldots & + & b^{n-1} & + & b^n \\ b \times S = & b & + & b^2 & + & b^3 & + & b^4 & + & \ldots & + & b^n & + & b^{n+1} \end{array}$$

On soustrait ces deux lignes :
$S - b \times S = 1 - b^{n+1}$
$S(1 - b) = 1 - b^{n+1}$

Calcul de $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots + b^n$

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S = & 1 & + & b & + & b^2 & + & b^3 & + & \ldots & + & b^{n-1} & + & b^n & \\
b \times S = & b & + & b^2 & + & b^3 & + & b^4 & + & \ldots & + & b^n & + & b^{n+1} &
\end{array}$$

On soustrait ces deux lignes :

$S - b \times S = 1 - b^{n+1}$

$S(1 - b) = 1 - b^{n+1}$

Donc

$$1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

Cette formule permet de calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{somme de termes}\\ \text{d'une suite géométrique}\end{array} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= u_0 + u_0 b + u_0 b^2 + u_0 b^3 + \cdots + u_0 b^n \\ &= u_0 \left(1 + b + b^2 + b^3 + \cdots + b^n\right) \\ &= u_0 \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} \end{aligned}$$

Sens de variation d'une suite géométrique

On étudie seulement le cas $u_0 > 0$.

- Si la raison $b > 1$, la suite géométrique croît strictement ;
- si $0 < b < 1$, elle décroît strictement.

Résumé

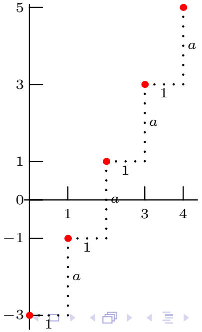
1. Génération de suites de nombres
2. Suites arithmétiques et suites géométriques
   - Suites arithmétiques
   - Suites géométriques
   - Représentation graphique
3. Exercices

Représentation graphique d'une suite arithmétique

La représentation graphique d'une suite arithmétique est formée de points alignés.
Normal : l'expression de u_n en fonction de n est celle d'une fonction affine (calculée pour des valeurs entières)

$$u_n = u_0 + na \longleftrightarrow f(n) = b + na$$

Exemple : la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $a = 2$ a pour terme général $u_n = -3 + 2n$.



Représentation graphique d'une suite géométrique

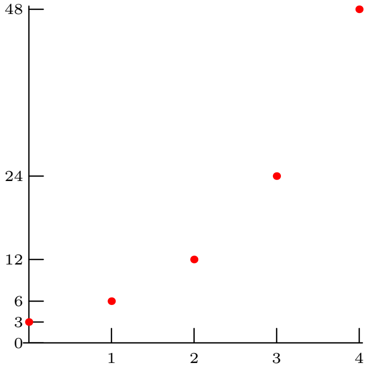


FIGURE – Suite géométrique $u_{n+1} = 2u_n$; $u_0 = 3$

La croissance est . . . géométrique !

Limite d'une suite géométrique

On retiendra :
(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison b.

- si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exemples :

Limite d'une suite géométrique

On retiendra :
(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison b.

- si $b > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- si $0 < b < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exemples :

- $\lim_{n \to +\infty} 2^n =$

Limite d'une suite géométrique

On retiendra :
(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison b.

- si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exemples :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Limite d'une suite géométrique

On retiendra :

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison b.

- si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exemples :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n =$

Limite d'une suite géométrique

On retiendra :
(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison b.

- si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exemples :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

Résumé

1. Génération de suites de nombres
2. Suites arithmétiques et suites géométriques
   - Suites arithmétiques
   - Suites géométriques
   - Représentation graphique
3. Exercices

Exercice 9.1

Déterminer les termes manquants dans les suites logiques suivantes, puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	-2	4	-8			

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{16}{10000}$			

Exercice 9.2

Déterminer les termes manquants dans les suites logiques suivantes, puis donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{8}$		

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	1,1	1,11	1,111		

Corrigé de l'exercice 9.2

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{32}$

La première suite est définie par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$ pour $n \geqslant 1$.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	1,1	1,11	1,111	1,1111	1,11111

La deuxième est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{10}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 9.3

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n.

a. u_n est le n-ième entier pair. (Le premier entier pair est 0).
b. u_n est le n-ième entier impair à partir de 7.
c. u_n est l'entier qui suit le n-ième multiple de 10.
d. u_n vaut 1 si n est pair et -1 si n est impair.

Corrigé de l'exercice 9.3

a. u_n est le n-ième entier pair. (Le premier entier pair est 0).
$\boxed{u_n = 2n - 2}$ pour $n \geqslant 1$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-2 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots & u_n \end{array}$$

b. u_n est le n-ième entier impair à partir de 7.
$\boxed{u_n = 2n + 5}$ pour $n \geqslant 1$

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 9 & 11 & \dots & 2n+5 \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \end{array}$$

Corrigé de l'exercice 9.3 (suite)

- c. u_n est l'entier qui suit le n-ième multiple de 10 :
  $\boxed{u_n = 10n + 1}$

$10 + 1$	$2 \times 10 + 1$	$3 \times 10 + 1$	$\dots$	$10n + 1$
u_1	u_2	u_3	$\dots$	u_n

- d. u_n vaut 1 si n est pair et -1 si n est impair : $\boxed{u_n = (-1)^n}$

Exercice 9.4

Dans chacun des cas suivants, écrire une relation de récurrence liant les deux termes u_n et u_{n+1}, ou éventuellement les trois termes u_n, u_{n+1} et u_{n+2}.

1. (u_n) est une suite dont chaque terme, à partir du deuxième, vaut le triple du précédent.
2. (u_n) est une suite dont chaque terme, à partir du troisième, vaut la moyenne arithmétique des deux qui le précèdent.
3. u_n est le nombre de segments que l'on peut construire avec n points distincts.
4. u_n est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets.

Corrigé de l'exercice 9.4

1. (u_n) est une suite dont chaque terme, à partir du deuxième, vaut le triple du précédent.

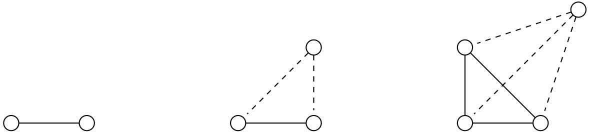
$$\boxed{u_{n+1} = 3u_n}$$

2. (u_n) est une suite dont chaque terme, à partir du troisième, vaut la moyenne arithmétique des deux qui le précèdent.

$$\boxed{u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 9.4 (suite)

3. u_n est le nombre de segments que l'on peut construire avec n points distincts.
Avec deux points, on construit un segment : $u_2 = 1$.



$u_2 = 1$ $u_3 = 3$ $u_4 = 6$

En passant de deux points à trois points, on ajoute deux segments : $u_3 = u_2 + 2$. En passant de trois points à quatre points, on ajoute trois segments : $u_4 = u_3 + 3$ ...

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + n}$$

Corrigé de l'exercice 9.4 (fin)

4. u_n est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets.

   $u_3 = 0$; $u_4 = 2$.
   On part d'un polygone convexe à n sommets. Il a u_n diagonales. On rajoute un sommet :

   - on le relie à tous les n autres sommets ; donc on trace n segments $(+n)$;
   - les segments le reliant aux deux sommets les plus proches (A et B) sont des côtés du nouveau polygone (-2) ;
   - l'ancien côté $[AB]$ devient une diagonale $(+1)$.

$$u_{n+1} = u_n + n - 2 + 1$$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + n - 1 \qquad \text{pour } n \geqslant 3}$$

Exercice 9.5

Soit la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
Donner les cinq premiers termes de la suite sous forme de fraction irréductible. Trouver une relation liant u_n et u_{n+1}.

Corrigé de l'exercice 9.5

Soit la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

$$u_0 = \frac{2^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$u_1 = \frac{2^1}{1!} = \frac{2}{1} = 1$$

$$u_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{3}$$

$$u_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{4 \times 3 \times 2} = \frac{2}{3}$$

Relation liant $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$: $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{n+1}}$

Exercice 9.6

Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = n^2 + n + 1$. Exprimer en fonction de n les termes suivants : v_{n+1}, v_{n-1},v_{2n},v_{3n-1} et la différence $v_{n+1} - v_n$.

Corrigé de l'exercice 9.6

Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = n^2 + n + 1$.

- $v_{n+1} = n^2 + 3n + 3$
- $v_{n-1} = n^2 - n + 1$
- $v_{2n} = 4n^2 + 2n + 1$
- $v_{3n-1} = 9n^2 - 3n + 1$
- $v_{n+1} - v_n = 2n + 2$

Exercice 9.7

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par

$$u_n = 1 + (-1)^n \frac{5}{2^{n-1}}.$$

Calculer u_1, u_2, u_3. Exprimer en fonction de n les termes u_{2n} et u_{2n+1}. Vérifier que le rapport $\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}$ est indépendant de n.

Corrigé de l'exercice 9.7

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par

$$u_n = 1 + (-1)^n \frac{5}{2^{n-1}}.$$

$u_1 = -4$

$u_2 = \frac{7}{2}$

$u_3 = -\frac{1}{4}$

$u_{2n} = \frac{10}{4^n} + 1$

$u_{2n+1} = \frac{-5}{4^n} + 1$

Pour tout n, $\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = -\frac{1}{2}$

Exercice 9.8

Pour chacune des suites définies ci-dessous : donner les quatre premiers termes ; écrire la relation liant u_4 à u_3, et celle liant u_n à u_{n-1}.

a) $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{array} \right.$; b) $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2^n} \end{array} \right.$

Corrigé de l'exercice 9.8

Pour chacune des suites définies ci-dessous : donner les quatre premiers termes ; écrire la relation liant u_4 à u_3, et celle liant u_n à u_{n-1}.

$$\text{a)} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases} \quad ; \text{b)} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2^n} \end{cases}$$

a) $u_4 = u_3 + 3$ et $u_n = u_{n-1} + n - 1$

b) $u_4 = \dfrac{u_3}{2^3}$ et $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2^{n-1}}$

Exercice 9.9

On considère la suite (X_n), définie pour tout entier naturel n par ses deux premiers termes $X_0 = 2$ et $X_1 = 3$, et la relation $X_{n+2} = 2X_{n+1} + X_n$. Calculer ses cinq premiers termes.

Corrigé de l'exercice 9.9

On considère la suite (X_n), définie pour tout entier naturel n par ses deux premiers termes $X_0 = 2$ et $X_1 = 3$, et la relation $X_{n+2} = 2X_{n+1} + X_n$. Calculer ses cinq premiers termes.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	3	8	19	46	111	268

Exercice 9.10

Montrer que la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n2^n$, vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$.

Corrigé de l'exercice 9.10

Montrer que la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n2^n$, vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
4(u_{n+1} - u_n) &= 4\left((n+1)2^{n+1} - n2^n\right) \\
&= 4\left((n+1) \times 2 \times 2^n - n2^n\right) \\
&= 4 \times 2^n \left((n+1) \times 2 - n\right) \\
&= 2^2 \times 2^n \left(2n + 2 - n\right) \\
&= 2^{n+2} \times (n+2) \\
&= u_{n+2}
\end{aligned}$$

Exercice 9.11

Les suites suivantes sont arithmétiques.

1. Sachant que $u_0 = 5$ et $u_{10} = 17$, calculer la raison a.
2. Sachant que $u_7 = 2$ et $u_9 = 1$, calculer u_{13}.
3. Sachant que $u_{100} = 4$ et $a = 2$, calculer u_2.

Corrigé de l'exercice 9.11

Les suites suivantes sont arithmétiques.

1. Sachant que $u_0 = 5$ et $u_{10} = 17$, calculons la raison a.
   De
   $$u_{10} = u_0 + 10a$$
   on déduit
   $$a = \frac{u_{10} - u_0}{10}$$
   $$a = \frac{17 - 5}{10}$$
   $$a = 1{,}2$$

Corrigé de l'exercice 9.11 (suite)

2. Sachant que $u_7 = 2$ et $u_9 = 1$, calculons u_{13}.
   De
   $$u_9 = u_7 + 2a$$
   on déduit
   $$a = \frac{u_9 - u_7}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5$$
   Puis
   $$u_{13} = u_9 + 4a = 1 + 4 \times (-0{,}5) = -1$$

   Remarque : on pouvait calculer u_{13} sans calculer la raison a :

$$\begin{tikzcd}
u_7 \arrow[rr, bend left, "-1"] & u_8 & u_9 \arrow[rr, bend left, "-1"] & u_{10} & u_{11} \arrow[rr, bend left, "-1"] & u_{12} & u_{13}
\end{tikzcd}$$

Corrigé de l'exercice 9.11 (suite)

3. Sachant que $u_{100} = 4$ et $a = 2$, calculons u_2.
   De
   $$u_{100} = u_2 + 98a$$
   on déduit
   $$\begin{aligned} u_2 &= u_{100} - 98a \\ &= 4 - 98 \times 2 \\ u_2 &= -192 \end{aligned}$$

Exercice 9.12

Combien de tuyaux sont empilés sachant que la rangée à terre en compte 50 (figure 3) ?

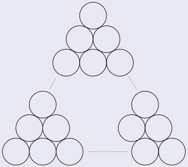


FIGURE – Les tuyaux

Corrigé de l'exercice 9.12

Combien de tuyaux sont empilés sachant que la rangée à terre en compte 50 (figure 3) ?

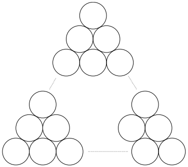


FIGURE – Les tuyaux

Le nombre de tuyaux est

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$$

Exercice 9.13

Pour les suites géométriques suivantes, on donne :

1. $u_0 = 5$, $b = 3$. Calculer u_{15}.
2. $u_8 = 10$, $u_9 = 11$. Calculer u_0.
3. $u_8 = 5$, $u_{10} = 10$. Calculer u_{20}.

Corrigé de l'exercice 9.13

Suites géométriques.

1. Avec $u_0 = 5$ et $b = 3$, on a : $u_{15} = u_0 \times 3^{15} = 71\,744\,535$

Corrigé de l'exercice 9.13

Suites géométriques.

1. Avec $u_0 = 5$ et $b = 3$, on a : $u_{15} = u_0 \times 3^{15} = 71\,744\,535$
2. $u_8 = 10$, $u_9 = 11$. Calculons u_0.
   Comme $u_9 = b \times u_8$, la raison est $b = \dfrac{u_9}{u_8} = 1{,}1$.
   D'après le cours, $u_8 = u_0 \times b^8$. Alors :
   $$u_0 = \frac{u_8}{b^8} = \frac{10}{1{,}1^8} \simeq 4{,}665$$

Corrigé de l'exercice 9.13

Suites géométriques.

1. Avec $u_0 = 5$ et $b = 3$, on a : $u_{15} = u_0 \times 3^{15} = 71\,744\,535$
2. $u_8 = 10$, $u_9 = 11$. Calculons u_0.
   Comme $u_9 = b \times u_8$, la raison est $b = \dfrac{u_9}{u_8} = 1{,}1$.
   D'après le cours, $u_8 = u_0 \times b^8$. Alors :
   $$u_0 = \frac{u_8}{b^8} = \frac{10}{1{,}1^8} \simeq 4{,}665$$
3. $u_8 = 5$, $u_{10} = 10$. Calculons u_{20}.
   De $u_{10} = b^2 \times u_8$, on déduit que $b^2 = \dfrac{u_{10}}{u_8} = 2$.
   $$u_{20} = u_{10} \times b^{10} = u_{10} \times (b^2)^5 = 10 \times 2^5 = 320$$
   NB : on ne sait pas si $b = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

Exercice 9.14

Prouver que pour toute suite géométrique (u_n) :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$$

Corrigé de l'exercice 9.14

Prouver que pour toute suite géométrique (u_n) :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$$

Exercice 9.15

Une feuille de papier a un dixième de millimètre d'épaisseur (0,1mm).

1. On plie la feuille en deux ; on replie le morceau obtenu en deux. On effectue en tout trente pliages. Quelle est l'épaisseur de papier obtenue ?
2. Combien de fois faudrait-il plier la feuille pour obtenir la distance de la Terre à la Lune (384 000 km) ?

Corrigé de l'exercice 9.15

Une feuille de papier a un dixième de millimètre d'épaisseur (0,1mm).

1. On plie la feuille en deux ; on replie le morceau obtenu en deux. On effectue en tout trente pliages. L'épaisseur de papier obtenue est
$$0{,}1 \times 2^{30} = 107374182{,}4\text{mm}$$
soit 107 km
2. Pour obtenir la distance de la Terre à la Lune (384 000 km, soit $3{,}84\&times10^{11}$ mm), il faut plier la feuille 42 fois.
$$0{,}1 \times 2^{41} \simeq 2{,}2 \times 10^{11}$$
$$0{,}1 \times 2^{42} \simeq 4{,}4 \times 10^{11}$$

Exercice 9.16

Écrire un algorithme qui calcule la somme de termes pour une suite arithmético-géométrique ($u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$).

Exercice 9.17

La suite E peut être générée de deux façons différentes :

1. $u_n = (1+n)(n-10)$ pour tout n
2. $u_{n+1} = u_n - 8 + 2n$ et $u_0 = -10$

Montrer que les deux méthodes donnent la même suite de nombres.

Exercice 9.18

BTS SIO Métropole mai 2014.
La loi de Moore, énoncée en 1975 par Gordon Moore, co-fondateur de la société Intel, prévoit que le nombre de transistors des micro-processeurs proposés à la vente au grand public double tous les 2 ans. Les micro-processeurs fabriqués en 1975 comportaient 9 000 transistors.

Pour modéliser cette loi de Moore, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9\,000$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n.

Un terme u_n de cette suite correspond au nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année $1975 + 2n$.

Exercice 9.18

1. Calculer u_1 et u_2 puis interpréter ces nombres.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué en 2001.
4. Selon ce modèle, à partir de quelle année les micro-processeurs intégreront-ils plus de 100 milliards de transistors ?

Corrigé de l'exercice 9.18

(u_n) est définie par $u_0 = 9\,000$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
u_n correspond au nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année $1975 + 2n$.

1. $u_1 = u_0 \times 2 = 9000 \times 2 = 18\,000$
   et $u_2 = u_1 \times 2 = 18\,000 \times 2 = 36\,000$
   En 1977, le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année sera de 18 000. En 1979, le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année sera de 36 000.
2. La suite (u_n) est géométrique de raison 2. Pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times 2^n = 9000 \times 2^n$$

Corrigé de l'exercice 9.18 (suite)

3. Le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué en 2001 $(1975 + 2 \times 13)$ sera

$$u_{13} = 9000 \times 2^{13} = 73\,728\,000$$

4. Selon ce modèle, les micro-processeurs intégreront plus de 100 milliards de transistors en 2023 :

$$u_{23} = 9000 \times 2^{23} \simeq 75 \text{ milliards}$$

$$u_{24} = 9000 \times 2^{24} \simeq 150 \text{ milliards}$$

Exercice 9.19

BTS SIO Polynésie mai 2014.
Le renouvèlement du parc informatique est échelonné sur 12 trimestres, pour un coût total de 95 500 €.
Le service comptable propose le financement suivant :

- pour le 1er trimestre, verser un montant de 6 000 € ;
- chaque trimestre, le montant versé augmente de 5 % par rapport à celui du trimestre précédent.

On note u_n le montant, exprimé en euro, versé le n-ième trimestre.
On a donc $u_1 = 6\,000$.

1. Vérifier que $u_2 = 6\,300$ et calculer u_3.
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

Exercice 9.19

(suite)

3. 1. Exprimer u_n en fonction de n.
   2. Calculer le montant versé au dernier trimestre, arrondi à l'euro,
4. On rappelle que, pour une suite géométrique (U_n) de raison q différente de 1 et de premier terme U_1 on a la formule :

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Le financement prévu permet-il de renouveler le parc informatique ? Justifier.

Corrigé de l'exercice 9.19

1. $u_1 = 6000$
   $u_2 = 6000 \times 1{,}05 = 6300$
   $u_3 = 6300 \times 1{,}05 = 6615$
2. Chaque trimestre, on multiplie par 1,05, donc la suite est géométrique de raison 1,05.
3. 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times 1{,}05^{n-1}$, soit $\boxed{u_n = 6000 \times 1{,}05^{n-1}}$
   2. $u_{12} = 6000 \times 1{,}05^{12-1} \simeq 10262$
4. $u_1 + u_2 + \cdots + u_{12} = 6000 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{12}}{1 - 1{,}05} \simeq 95502{,}76$
   Le financement prévu permet juste de renouveler le parc.

Exercice 9.20

a) Calculer la somme de tous les nombres entiers naturels se terminant par 3 et inférieurs à 1000.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=50} 2^k$.

c) Calculer $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=20} u_i$, sachant que $u_n = \dfrac{2^n}{3}$ pour tout entier n.

d) Calculer $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{1}{59049}$.

Corrigé de l'exercice 9.20

a) Calcul de la somme de tous les nombres entiers naturels se terminant par 3 et inférieurs à 1000.

$$3 + 13 + 23 + 33 + \cdots + 993 = 100 \times \frac{3 + 993}{2} = 49\,800$$

C'est la somme de 100 termes d'une suite arithmétique de raison 10.

Pour trouver le nombre de termes (100), on peut utiliser les notations du cours :

$$\begin{aligned} u_0 &= 3 \\ u_1 &= 13 \\ &\vdots \\ u_n &= 3 + 10n = 993 \qquad \text{d'où } n = \frac{993 - 3}{10} = 99 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9.20 (suite)

b) Calcul de $\sum_{k=1}^{k=50} 2^k$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=50} 2^k &= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{50} \\ &= 2 \times \frac{1 - 2^{50}}{1 - 2} \\ &\simeq 2{,}25 \times 10^{15}\end{aligned}$$

C'est la somme de 50 termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

Corrigé de l'exercice 9.20 (suites)

c) Calcul de $S = \sum_{i=0}^{i=20} u_i$, sachant que $u_n = \dfrac{2^n}{3}$ pour tout entier n.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{i=20} \frac{2^i}{3} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \cdots + \frac{2^{20}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1-2^{21}}{1-2} \\ &\simeq 699\,050{,}33\end{aligned}$$

C'est la somme de 21 termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Corrigé de l'exercice 9.20 (fin)

d) Calcul de $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{59049}$.

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{59049} &= 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}\\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}}\\ &\simeq 1{,}499991532\end{aligned}$$

C'est la somme de 11 termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{3}$.

Exercice 9.21

Calculer le nombre total de cannettes dans cette œuvre d'art.

Indication : le dernier étage est un carré de 23 cannettes de côté.

Corrigé de l'exercice 9.21

On voit 4 piliers. Chacun comporte

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 11^2 = 506$$

Ce n'est pas une somme connue (1, 2^2, 3^2 ... ne forment ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique).

On utilise la calculatrice ($\sum_{K=1}^{11} K^2$) ou un programme.

Total :

$$4 \times 506 + 23^2 = 2553$$

Exercice 9.22

Selon la légende, le jeu d'échecs fut inventé en Inde par un savant. Le roi, séduit par ce nouveau loisir, le convoqua au palais :
- Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! Je t'offre ce que tu désires !
Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva : « Parle donc, insolent ! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits ? »
Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger : « J'accepte ton présent. Tu feras déposer un grain de blé sur la première case de l'échiquier. »
- Et c'est tout ? Te moquerais-tu de moi ?
- Pas du tout, Sire. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la deuxième case, 4 sur la troisième, 8 sur la quatrième et ainsi de suite...
Le roi s'énerva pour de bon : « Puisque tu honores si mal ma générosité, va-t-en ! Ton sac de blé te sera porté demain et ne me dérange plus ! »
Le roi a-t-il eu raison d'accepter cette proposition ?

(informations : 1000 grains de blé pèsent en moyenne 43 grammes. La production mondiale annuelle de blé est environ 740 millions de tonnes.)

Corrigé de l'exercice 9.22

Sur la 1ère case, on place 1 grain. Sur la 2ème case, on place 2 grains. Sur la 3ème case, on place $2^2 = 4$ grains.
Sur la 4ème case, on place $2^3 = 8$ grains.

$\vdots$

Sur la 64ème case, on place $2^{63} \simeq 9{,}2 \times 10^{18}$ grains.
La somme des grains est la somme de 64 termes d'une suite géométrique de raison 2 :

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \simeq 1{,}845 \times 10^{19}$$

Comme 1 grain pèse 43 milligrammes, tous ces grains pèsent

$$1{,}845 \times 10^{19} \times 43 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 10^{-3} \simeq 7{,}93 \times 10^{11} \text{ tonnes}$$

soit 793 milliards de tonnes : c'est 1000 fois supérieur à la production mondiale annuelle de blé : 740 millions de tonnes.

Exercice 9.23

Une estimation grossière des réserves totales de pétrole et de gaz sous le plateau continental norvégien au début de l'année 1999 était de 13 milliards de tonnes (ou équivalent pétrole). On a extrait cette année-là environ 250 millions de tonnes.

1. Dans l'hypothèse où l'extraction va se maintenir à ce niveau constant, quand les réserves seront-elles épuisées ?
2. Si l'extraction est réduite de 2% chaque année à partir de début 1999, combien de temps vont durer les réserves ?

Corrigé de l'exercice 9.23

1. Si chaque année l'extraction est constante, les réserves (en millions de tonnes) forment une suite arithmétique de raison -250. On peut poser $u_0 = 13000$ pour les réserves en 1999. Puis u_1 en 2000, etc.
   Pour tout n, $u_n = u_0 - 250n = 13000 - 250n$.
   Les réserves seront épuisées quand u_n sera nul, donc pour $n = \dfrac{13000}{250} = 52$: en 2051.

Corrigé de l'exercice 9.23 (suite)

2. Si l'extraction est réduite de 2% chaque année :

   en 1999, on extrait 250 (millions de tonnes) ;
   en 2000 (1999 + 1), on extrait $250 \times 0{,}98$
   $\vdots$
   en $1999 + n$, on extrait $250 \times 0{,}98^n$

   On pourrait extraire jusqu'à ce que :

$$250 + 250 \times 0{,}98 + \cdots + 250 \times 0{,}98^n \geqslant 13000$$

   C'est la somme de $n + 1$ termes d'une suite géométrique de raison 0,98 :

$$250 \times \frac{1 - 0{,}98^{n+1}}{1 - 0{,}98} \geqslant 13000$$

Corrigé de l'exercice 9.23 (fin)

$$250 \times \frac{1-0{,}98^{n+1}}{1-0{,}98} \geqslant 13000$$

On peut tâtonner avec la calculatrice jusqu'à dépasser 13000. Mais on n'y arrive pas.
En fait l'inégalité s'écrit :

$$12500\left(1-0{,}98^{n+1}\right) \geqslant 13000$$

Le côté gauche est inférieur à 12500 pour tout n : on ne dépassera jamais 13000.