BTS SIO1

Corrigés d'exercices sur les fonctions

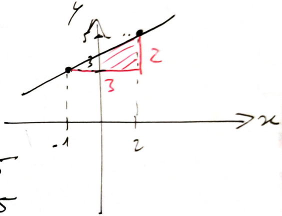
P. Vairé

Lycée Carcouët

18 novembre 2020

Exercice 8.1

$f(2) = 5 \qquad f(-1) = 3 \qquad f(x) = ax + b$



- $a = \dfrac{\text{différence des } y}{\text{différence des } x} = \dfrac{5-3}{2-(-1)} = \dfrac{2}{3}$

- <u>Calcul de</u> b

$f(2)=5$ s'écrit :

$$a \times 2 + b = 5$$
$$\frac{2}{3} \times 2 + b = 5$$
$$b = 5 - \frac{4}{3}$$
$$b = \frac{11}{3}$$

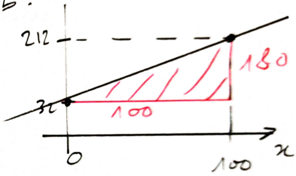
L'expression de f est :

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}}$$

Exercice 8.2

Notons x la température en °C et y celle en °F.

On cherche a et b tels que $y = ax + b$.



- $a = \dfrac{212 - 32}{100 - 0} = \dfrac{180}{100} = 1,8$
- Pour $x = 0$, $y = 32$:

$$32 = a \times 0 + b$$
$$32 = b.$$

Ainsi $y = 1,8x + 32$

$$\boxed{T_{°F} = 1,8 \times T_{°C} + 32}$$

- $\xrightarrow{-32}$ $y - 32 = 1,8x$

$\xrightarrow{:1,8}$ $\dfrac{y - 32}{1,8} = x$

$$\boxed{\dfrac{T_{°F} - 32}{1,8} = T_{°C}}$$

°C	18	40	15,6	37,7
°F	64,4	104	60	99,9

Exercice 8.3

Fonction affine par morceaux. Volume de la cuve.

- Pour $0 \leq x \leq 60$, le liquide est seulement dans le cube du bas

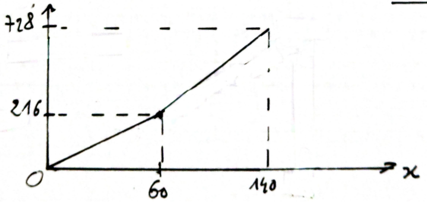
$$V(x) = 60 \times 60 \times x \times 0{,}001 = \boxed{3{,}6x}$$

(NB : 1 litre $= 1\,dm^3 = 1000\,cm^3$)

- Pour $60 \leq x \leq 80 + 60$,

$$V(x) = \Big[\underbrace{60^3}_{\text{(cube du bas rempli)}} + 80 \times 80 \times \underbrace{(x-60)}_{\text{(hauteur de liquide dans le cube du haut)}}\Big] \times 0{,}001$$

$$V(x) = 216 + 6{,}4(x-60) = \boxed{6{,}4x - 168}$$

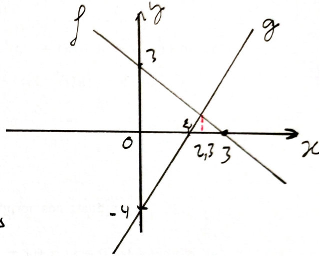


Exercice 8.4

1) Représentation de f et g

$f(x) = -x+3$

$g(x) = 2x-4$



2) Graphiquement $f(x) > g(x)$

pour $x < 2,3$

(quand la droite de f est au-dessus de l'autre).

Calcul : $-x+3 > 2x-4$ $\Big) +x, +4$

$4+3 > 2x+x$

$7 > 3x$

$\frac{7}{3} > x$ $\Big) :3$

3)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x+3$		+		+	0	−	
$2x-4$		−	0	+		+	
produit $c(x)$		−	0	+	0	−	

$c(x) < 0$ pour

$\boxed{x \in \,]-\infty; 2[\,\cup\,]3; +\infty[}$

Exercice 8.5

- $(x+7)(1-4x) < 0$

x	$-\infty$		-7		$1/4$		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Solution :
$]-\infty\,;-7[\ \cup\ ]\frac{1}{4}\,;+\infty[$

- $\dfrac{x+7}{1+4x} < 0$

x	$-\infty$		-7		$-1/4$		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+4x$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$-\frac{1}{4}$ est une valeur interdite

Solution :
$]-7\,;-\frac{1}{4}[$

Exercice 8.5 (suite)

- $(2x-1)(x-1)(1-x) > 0$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$+$	0	$-$	0	$-$	

Solution : $]-\infty ; \frac{1}{2}[$

Autre méthode : l'inéquation s'écrit :

$$(2x-1)(x-1)\times[-(x-1)] > 0$$

$$-(2x-1)(x-1)^2 > 0 \quad \times(-1)$$

$$(2x-1)\underbrace{(x-1)^2}_{\text{carré : positif}} < 0$$

$$: (x-1)^2 > 0 \quad \text{si } x \neq 1$$

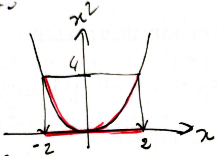
$$2x-1 < 0$$

$$x < 1/2$$

Exercice 8.6

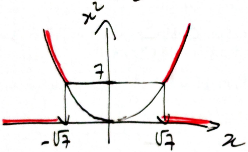
Fonctions usuelles

ⓐ $x^2 < 4$



Solution : $x \in]-2\,;2[$

ⓑ $x^2 \geqslant 7$



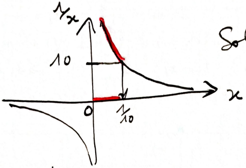
Solution : $x \in]-\infty\,;-\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}\,;+\infty[$

ⓒ $x^2 < -1$

Pour tout x, $x^2 \geqslant 0$, donc l'inéquation n'a pas de solution.

Exercice 8.6 (suite)

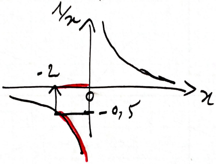
(e) $\frac{1}{x} > 10$



Solution :

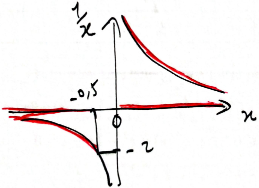
$]0\,;\frac{1}{10}[$

(f) $\frac{1}{x} < -0{,}5$



solution : $x \in]-2\,;0[$

(g) $\frac{1}{x} > -2$

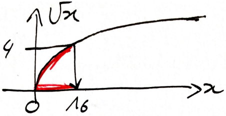


solution :

$x \in]-\infty\,;-0{,}5[\cup]0\,;+\infty[$

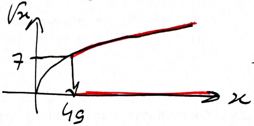
Exercice 8.6 (suite)

(h) $\sqrt{x} < 4$



solution : $[0\,;16[$

(i) $\sqrt{x} \geqslant 7$



solution : $x \in [49\,;+\infty[$

(j) $\sqrt{x} \leq -1$. Pas de solution (car $\sqrt{x} \geqslant 0$ pour tout x).

(k) $\sqrt{x} > -7$. La solution est $[0\,;+\infty[$ (car, pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0 > -7$).

- On ne peut pas affirmer : " si $x > -0{,}5$, alors $x^2 > 0{,}25$ ", puisque c'est faux pour $x = 0$ par exemple.

Exercice 8.9

(a) $-x^2+x+1=0$

$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 1 = 5$. L'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \boxed{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \boxed{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$

(b) $5x^2+7x+6=0$

$\Delta = 7^2 - 4\times 5\times 6 = -71 < 0$: l'équation n'a pas de solution

(c) $7x^2+4x=0$

$\Delta = 4^2 - 4\times 7\times 0 = 16$. Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{16}}{14} = \boxed{-\dfrac{4}{7}}$

et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{16}}{14} = \boxed{0}$

(Mieux : $7x^2+4x = x(7x+4) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul :

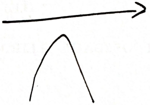
soit $x=0$, soit $7x+4=0$

$x = -\dfrac{4}{7}$)

Exercice 8.9 (suite)

(d) $-x^2+2x-3 \leq 0$

$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times(-3) = -8$: la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses. Comme $a=-1<0$, elle est tournée vers le bas :



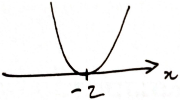
Pour tout x, $-x^2+2x-3<0$.

Donc $\begin{cases} \text{tout } x \text{ est solution.} \\ \text{la solution est }]-\infty\,;+\infty[\\ \text{la solution est } \mathbb{R}. \end{cases}$

Exercice 8.9 (suite)

(e) $x^2 + 4x + 4 > 0$

- $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$ $\quad x_1 = \dfrac{-4}{2} = -2$ est la seule racine.
- $a = 1 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut :



Pour tout x, $x^2 + 4x + 4 \geqslant 0$ (0 pour $x = -2$).

La solution est donc $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$ (tous les réels sauf -2).

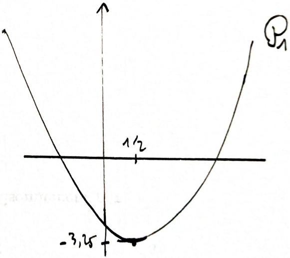
Exercice 8.10

① P_1 : $y = 1x^2 - x - 3$ $\quad a = 1 > 0$ donc P_1 est la parabole tournée vers le haut.

• l'abscisse du sommet est $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$. Son ordonnée est $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3 = -3,25$ $\quad \boxed{S_1\left(\frac{1}{2} ; -3,25\right)}$

• Variations de $f_1 : x \mapsto x^2 - x - 3$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
f_1	$\searrow$	$-3,25$	$\nearrow$



Exercice 8.10 (suite)

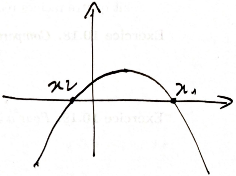
- Signe de $f_2 : x \mapsto -x^2+x+1$

Dans l'exercice précédent, on a trouvé les deux racines, $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$a = -1 < 0$ donc $\mathcal{P}_2$ est tournée vers le bas.

Signe de $f_2(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



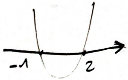
② $f_1(x) > f_2(x)$ s'écrit

$x^2 - x - 3 > -x^2 + x + 1$ $\quad +x^2,\ -x,\ -1$

$2x^2 - 2x - 4 > 0$ $\quad :2$

$x^2 - x - 2 > 0$

$\Delta = 9 \quad x_1 = -1, \ x_2 = 2$



La solution est

$\boxed{]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[}$

(là où $\mathcal{P}_1$ est au-dessus de $\mathcal{P}_2$)

Exercice 8.11

(1) La production est rentable quand la droite des recettes est au-dessus de la courbe des coûts : entre 10 et 42 tonnes, environ.

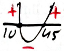
(2) Résolvons $R(q) > C(q)$

$$1 20q > 2q^2 + 10q + 900 \quad \Big\downarrow -120q$$

$$0 > 2q^2 - 110q + 900$$

$\Delta = 110^2 - 4 \times 2 \times 900 = 4900$. Deux racines : $q_1 = 10$, $q_2 = 45$.

$a > 0$



Solution : $\boxed{]10;45[}$

(3) On cherche q telle que $C(q) = 2500$

$$2q^2 + 10q + 900 = 2500 \quad \Big\downarrow -2500$$

$$2q^2 + 10q - 1600 = 0$$

$\Delta = 12900$. Deux solutions : $q_1 \simeq -30{,}9$ et $q_2 \simeq \boxed{25{,}9}$. Seule q_2 convient ici.

Exercice 8.11 (suite)

④ $f(q) = \underbrace{R(q)}_{\text{recette}} - \underbrace{C(q)}_{\text{coût}}$ $\quad f(q)$ est le <u>bénéfice</u>.

$f(q) = 120q - (2q^2 + 110q + 900)$

- $f(q) = -2q^2 + 110q - 900$

$-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-110}{2\times(-2)} = 27{,}5$

Var<u>iations</u> de f $\qquad a = -2 < 0$ $\quad \cap$

q	0		$27{,}5$		80
f	-900	$\nearrow$	$612{,}5$	$\searrow$	-4900

Le bénéfice est maximal pour $q = 27{,}5$ tonnes et vaut $f(27{,}5) = 612{,}5$ €